Marató de problemes

Charizard

March 11, 2022

Problema 131

Sigui $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x - 1$ i $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$.

Primer de tot notem que $S \subset \mathbb{Q}$ perquè les tres funcions aplicades a un racional porten a un racional.

Definim la funció $d : S \to \mathbb{N}^0$ on $d(x)$ és el mínim de concatenacions de f_1, f_2, g que hem d'aplicar a 0 per a obtenir x. Per exemple tenim que $d(n) = |n|, \forall n \in \mathbb{Z}$ i que l'únic x amb $d(x) = 0$ és 0. Llavors $x \in S \implies \exists y \in S : d(y) = d(x) - 1, f_1(y) = x$ or $f_2(y) = x$ or $g(y) = x$, aquesta y seria el valor que aconseguim en aplicar les mateixes funcions que s'han d'aplicar per arribar a x amb $d(x)$ funcions, a excepció de l'última.

Ara veurem que cap racional de la forma $\frac{a}{3}$ on $a \equiv 2 \mod 3$ pertany a S. Si un racional d'aquesta forma pertany a S, llavors existeix y que compleix el que acabem de dir. Si $g(y) = x$, com y és racional perquè pertany a S, si diem que $y = \frac{a}{b}$ (en forma irreductible), llavors $g(y) = \frac{b^2}{a(a-b)}$ i aquesta ja és la seva forma irreductible perquè $gcd(a, b) = 1$ i $gcd(a - b, b) = 1$. Per tant, $\forall y, g(y) \neq x$ ja que 2 no és un quadrat perfecte mòdul 3.

Llavors y ha de ser $x + 1$ o $x - 1$, per tant, també és de la forma $\frac{a}{3}$ on $a \equiv 2 \mod 3$. I hem dit que $d(y) = d(x) - 1$, aplicant el mateix raonament $d(x)$ cops, arribem a què $\exists z$ de la forma $\frac{a}{3}$ on $a \equiv 2 \mod 3$ amb $d(z) = 0$, però hem dit que l'únic z que pot complir això és el 0, que no és de la forma $\frac{a}{3}$ on $a \equiv 2 \mod 3$. Hem arribat a una contradicció, per tant, no hi ha cap element de S de la forma $\frac{a}{3}$ on $a \equiv 2 \mod 3$ i la generació del 97 no anirà en bloc a totes les festes racionals.