P2001. Una odissea en l'espai

Team Charizard (Leo)

March 13, 2022

Para terminar esta épica Marató de problemes 2022, resolvemos el ejercicio 3.74 de mi proyecto de libro sobre Teoría de conjuntos axiomática llamado 'Teoría de conjuntos axiomática'. Por suerte para los correctores no lo estoy haciendo a mano, de nada.

Ejercicio 3.74

Sea $G = (V, E)$ un grafo, potencialmente infinito. Utiliza el teorema 3.27 (recursión transfinita) para demostrar que G tiene un árbol de expansión T.

A tener en cuenta

En caso de que el olvidadizo lector no recuerde las propiedades relevantes de los ordinales, la definición de ordinal (Def 2.30) y de buen orden (Def 3.7) están en las páginas 35 y 52 respectivamente. Además las definiciones de grafo (A.1), de grafo conexo (A.3) y de árbol (A.4) para conjuntos arbitrarios aparecen en el Anexo A, página 236. Por si el olvidadizo lector también es un vago y no se lee las definiciones, teoremas, ni el anexo, recomendamos revisar el Napkin (muy recomendado), empezando en la página 801 (en concreto los puntos 83.3.10 y 83.5.2)[1]. Además, recordamos que cuando hablamos de camino nos referimos siempre a un camino sin vértices repetidos.

Solución

Por el teorema 3.24, V tienen un buen orden y existe una biyección $\sigma : \kappa \to V$ entre algún ordinal κ y V que preserva el buen orden de V. Por comodidad, denotamos $\sigma(i)$ por v_i.

Construiremos una sucesión de árboles $(T_i)_{i \leq \alpha}$ (índices ordinales) con la propiedad de que T_β es un árbol conexo e incluye a los vértices v_i para $i \leq \beta$; y además $V_\gamma \subseteq V_\beta$ y $E_\gamma \subseteq E_\beta$ para $\gamma \leq \beta$ ordinales, donde V_i y E_i son los

[1]Bromas aparte, os recomiendo de verdad que busquéis el Napkin para entender la recursión transfinita, desde Charizard$^{\text{TM}}$ nos esforzamos por que nuestras soluciones sean fáciles de entender ;).

conjuntos de vértices de T_i. Una vez hayamos hecho esto, tendremos el árbol T_κ, que es un árbol de expansión de G.

Por el teorema 3.23, podemos definir una sucesión dando un término inicial, una definición recursiva del término sucesor, y una definición recursiva del término para un ordinal límite.

Caso base. Sea $T_0 = (\{0\}, \emptyset)$ que es árbol y es conexo.

Caso de sucesor. Suponiendo que T_β es un árbol conexo que incluye a v_i para $i \leq \beta$. Si $v_{\beta+1} \in T_\beta$ ya hemos terminado. De lo contrario, consideremos un camino finito $(c_i)_{i\in[n]}$ que empieza en $v_{\beta+1}$ y termina en v_0. Sea $k \in [n]$ el índice más grande tal que $c_i \notin T_\beta$ para $i \leq k$ pero $c_{k+1} \in T_{\beta+1}$. Añadimos los primeros k vértices y las aristas entre los vértices consecutivos añadidos y la arista entre c_k y c_{k+1}.

Es decir, si $T_\beta = (V, E)$,

$$T_{\beta+1} = (V', E') = (V \cup \{c_1, \ldots, c_k\}, E \cup \{(c_1, c_2), \ldots, (c_{k-1}, c_k), (c_k, c_{k+1})\})$$

Claramente Para comprobar que es conexo, consideremos una pareja de vértices cualquiera $u_1, u_2 \in V'$. Si ambos están en V, hemos acabado. Por otro lado, si ambos están en $\{c_1, \ldots, c_k\}$ también hemos terminado. Y si uno (digamos u_1) es c_i y el otro es elemento de V, basta hacer un camino finito que va de u_1 a c_{k+1} y otro de c_{k+1} a u_2, de manera que al unirlo tendremos un camino finito que no tiene vértices repetidos.

Y para comprobar que es árbol demostraremos que el camino es único. Supongamos que hay dos caminos distintos entre u_1 y u_2, elementos de V'. Dado que T_β es árbol, uno de los dos caminos que une u_1 con u_2 debe pasar por un elemento c_i con $i \in [n]$. Pero c_i solo está conectado con c_{i-1} y c_{i+1}. Por tanto, o bien este c_i es un extremo o bien podemos podemos ir en ambas direcciones desde c_i hasta llegar a un extremo. Vamos en la dirección que disminuye el índice y como c_0 solo está unido a c_1 llegaremos un extremo, que debe ser un c_i. Si el otro extremo es otro c_j, obviamente solo hay un camino que los una. Redon, te mando este mensaje escondido en una solución para que mis compañeros no me impidan mandarlo, tienen mucho beef contigo, pero yo sé que eres un buen tío (#RedonEsBuenTío). Y si es elemento de V, el camino que los une debe ir primero hasta c_{k+1}, el punto donde se conecta el camino de los c_i con T. Y a partir de ahí el camino desde c_{k+1} hasta el final está determinado de manera única (por hipótesis de inducción).

Caso límite. Finalmente, si λ es un ordinal límite y $T_\beta = (V_\beta, E_\beta)$,

$$T_\lambda = (\bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta, \bigcup_{\beta<\lambda} E_\beta)$$

Ahora comprobamos que es un árbol conexo. Primero, es grafo porque cada arista es una pareja de vértices (v_1, v_2) que están en V_λ porque al estar $v_1 \in V_{\beta_1}$ y $v_2 \in V_{\beta_2}$, ambos están en V_λ. Además es conexo porque toda pareja $v_1 \in V_{\beta_1}, v_2 \in V_{\beta_2}$, tiene un camino entre ellos en $T_{\max(\beta_1,\beta_2)}$. Finalmente, es árbol porque si hubiese dos vértices $v_1, v_2 \in V_\lambda$ con dos caminos distintos entre ellos, dado que cada arista aparece en algún árbol anterior T_α con $\alpha < \lambda$ y el número de aristas que consideramos es finito, podemos coger el máximo de los ordinales, teniendo que hay un $\alpha < \lambda$ donde T_α también contiene dos caminos entre dos de sus vértices. Esto es una contradicción, luego el grafo T_λ debe ser un árbol.

En caso de tener dudas o sugerencias sobre la solución podéis mandar un correo a mi mail institucional leonardo.costa@estudiantat.upc.edu (no hagáis caso al estudiantat, es un formalismo).