

2002

Vam veure a numeric que la formula del error per a la formula dels trapezis composta es

$$E = T_N(f) - \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{12} h^2 f''(c) \quad \text{per algun } c \in (a, b)$$

En el nostre cas $a=0$ $f(x) = x^x$
 $b=10$

$$\Rightarrow f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$$

$$f''(x) = x^x (\ln(x) + 1)^2 + x^{x-1} \quad \text{~~... ..~~}$$

$$f'''(x) = x^x (\ln(x) + 1)^3 + x^{x-1} (\ln(x) + \frac{x-1}{x}) + 2x^{x-1} (\ln(x) + 1)$$

Sarem que

$$\int_0^{10} x^x dx = \int_0^1 x^x dx + \int_1^{10} x^x dx$$

Veiem que el primer terme el podem ignorar?

Podem fitar inferiorment la integral per

$$\int_0^{10} x^x dx = \sum_{i=1}^{10} \int_{i-1}^i x^x dx \geq \left(\sum_{i=1}^9 i^i \right) + \frac{1}{e} \geq \sum_{i=1}^9 i^i = 405071317$$

\uparrow max en $[0, 1]$

Podem fitar superiorment $\int_0^1 x^x dx$ per 1

$$\frac{1}{405071317} \ll 0.05 \Rightarrow \text{podem aproximar } \int_0^{10} x^x dx \approx \int_1^{10} x^x dx$$

Calculem ara $\int_1^{10} x^x dx$

~~... ..~~

En l'interval $[0, 10]$, $f''(x)$ es estrictament creixent ja que tots els termes de $f'''(x)$ son > 0

Per tant el error de la formula dels trapezis el podem fitar per

$$E = \frac{10-1}{12} h^2 f''(c) \leq \frac{10-1}{12} h^2 f''(10) = \frac{10-1}{12} h^2 10^{10} (\ln(10) + 1)$$

Volem trobar h t.q. el percentatge d'error es $< 0,05$

$$\frac{E}{\int_0^{10} x^x dx} < \frac{E}{405071317} \Rightarrow \text{Si } \frac{E}{405071317} < 0,05$$

\uparrow fita inf

$$\Rightarrow \frac{E}{\int_0^{10} x^x dx} < 0,05$$

diuemli $K = 405071317$

Busquen h que ho compleixi:

$$\frac{10^{11} h^2 (\ln(10) + 1)}{12} < 0,05 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{12 \cdot 0,05}{10^{11} \cdot (\ln(10) + 1)}} > h$$

$$\Leftrightarrow h < 0,084$$

Considerem $h = \frac{9}{120} \approx 0,075$ \Rightarrow la fórmula dels trapezis per aquesta h donarà un valor aproximat ~~excessiu~~ amb un error menor al 5%

$$\int_0^{10} x^x dx \approx \frac{h}{2} \left(1 + 10^{10} + 2 \sum_{i=1}^{119} (1 + i \cdot h)^{(1+i \cdot h)} \right) \approx \boxed{3,072953 \cdot 10^9}$$