Team Charizard

Problema 2021

Li preguntem al Pau Redón si ell ha sentit la demostració.

Ell seria a primera fila, ja que només sap comptar fins a 1 i a qualsevol altre lloc quedaria desubicat. Parlar amb el Redón no és una tasca fàcil, ja que ~~en~~ ell només coneix dues lletres de l'alfabet: la "W" i la "Y" (ni tansols és prou intel·ligent com per triar dues lletres que s'utilitzen). Per si fos poc, la seva comunicació es limita a paraules amb $a-b+2c+1$ W's i $b-c$ Y's, en algun ordre aleatori. Notem, a més, que per pronunciar-les bé, a la $c+1$-èssima "W" la pronuncia diferent, així que per entendre'l millor direm que és la "W tònica", o bé "Ẃ". Intentem calcular la riquesa del vocabulari del Redón, és a dir, el nombre de paraules que sap pronunciar:

Per un costat, li han $(a-b+2c+1)$ W's, $(b-c)$ Y's $\Rightarrow \binom{a+c+1}{b-c}$ paraules.

També es poden comptar: c W's abans de la Ẃ, $a-b+c$ W's després de la Ẃ, k Y's abans de la Ẃ, $b-c-k$ Y's després de la Ẃ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{b-c} \binom{c+k}{k} \binom{a-k}{b-c-k} \text{ paraules.}$$

Per tant, fent un doble comptatge, ja sabem que:

$$\sum_{i=0}^{b-c} \binom{c+i}{i}\binom{a-i}{b-c-i} = \binom{a+c+1}{b-c}$$

Equivalentment (o com diria el Redón: " $\underbrace{WWW\cdots}_{c}\underbrace{W}_{c+1}\underbrace{\cdots WW}_{a-b+c}\underbrace{YY\cdots Y}_{b-c}$ ")

$$\frac{\binom{a+c+1}{b-c}}{\binom{a}{b-c}\binom{b}{c}} = \sum_{i=0}^{b-c} \frac{\binom{c+i}{i}\binom{a-i}{b-c-i}}{\binom{a}{b-c}\binom{b}{c}} = \sum_{i=0}^{b-c} \frac{(c+i)!\,(a-i)!\,(b-c)!\,(a-b+c)!\,c!\,(b-c)!}{i!\,c!\,(b-c-i)!\,(a-b+c)!\,a!\,b!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{b-c} \frac{(c+i)!\,(b-c-i)!}{b!} \cdot \frac{(b-c)!^2}{(b-c-i)!^2\,i!^2} \cdot \frac{i!(a-i)!}{a!} \cdot \frac{(a-b+c)!\,c!}{(a-b+c)!\cdot c!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{b-c} \frac{\binom{b-c}{i}^2}{\binom{a}{i}\binom{b}{c+i}}$$

WYYWY.... perdó, vull dir: Tal com voliem demostrar.

Scanned with CamScanner