Desmenelaos

"No tenim hipòtesi, només demostracions"

P. 120

He d'admetre que de vegades aquests motifs de l'Aleu em decebem.
Tots vivint tant a prop de la FME però tan lluny de la matrícula a càlcul.

Demostrarem que la hipòtesi és certa independentment de si f és contínua.

Suposem que és fals, és a dir, que existeix un $N \in \mathbb{R}$, (a_n) successió amb $a_n \to \infty$ tal que $\frac{f(a_n)}{a_n} < N-1$ $\forall n$.

Per la condició de l'enunciat, $\exists M_N > 0$ tal que, $\forall x \geq M_N$, $f(x+1)-f(x) > N$.

Sigui $m = \inf\limits_{x \in (0, M_N+1)} \{f(x)\}$ (Existeix ja que f està fitada en tot subinterval finit de $(0,\infty)$.).

Ara: $\forall x \in [M_N, M_N+1)$, $f(x) \geq m$. $f(x+1) > N + f(x) = N+m$.

Usant $f(x+1) > N+f(x)$ $\forall x \geq M_N$ i una suma telescòpica, n'obtenim que:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+,\ \forall x \in [M_N, M_N+1),\quad f(x+k) > kN + m \quad (1)$$

Alesheres:

$$\frac{f(a_n)}{a_n} \underset{\uparrow}{=} \frac{f(x_n+k_n)}{x_n+k_n} \overset{(1)}{>} \frac{k_n N + m}{x_n+k_n} \overset{x_n \leq M_N+1}{\geq} \frac{k_n N+m}{M_N+1+k_n} \underset{\uparrow}{>} N-1$$

$\forall a_n > M_N$, $\exists x_n \in [M_N, M_N+1)$ tg $a_n = x_n + k_n$, $\exists k_n \in \mathbb{Z}^+$

per a_n prou gran, k_n és prou gran i en el límit s'acosta tant a N com vulguem, en particular a partir d'un punt és $>N-1$.

Com que inicialment havíem suposat que $\frac{f(a_n)}{a_n} < N-1$ $\forall n$, arribem a contradicció, i per tant $\frac{f(x)}{x} \to \infty$ ∎