210 La pastanaga interplanetària

Francesco Virgolini

Ñifáuuuuu

Sigui C l'embolcall convex de les n esferes (formalment el podríem definir com el conjunt convex de $\mathbb{R}^3$ més petit que conté totalment les n esferes). Observem que la superfície que busquem (que anomenem S) és la intersecció entre C i les n esferes originals.

És més, la curvatura Gaussiana d'un punt $x \in C$ dependrà únicament de si pertany o no a S. Si $x \in \mathring{S}$, llavors $K(x) = 1/r^2$, i si $x \in C \setminus \overline{S}$, llavors $K(x) = 0$ [1]. El cas $x \in \mathring{S}$ és fàcil de veure, ja que localment l'entorn de x és el mateix que en l'esfera original, així que la curvatura serà $1/r^2$. En el cas $x \in C \setminus \overline{S}$, tenim que existeix una recta $r \subseteq C$ que conté x, ja que per la construcció de l'embolcall convex tenim que hi ha dos punts en esferes diferents tals que x es troba al segment que els uneix. Això de per si sol no implica que $K = 0$, però per la convexitat de C tenim que podem dibuixar un pla que passi per x de manera que l'entorn de x en C es trobi tot a la mateixa banda del pla. Aleshores, la curvatura des de x en totes les direccions tindrà el mateix signe, i tindrem que una de les curvatures principals serà 0 (la corresponent a la recta). Llavors, $K = k_1 \cdot k_2 = 0$ també.

Un cop calculada la curvatura, podem trobar l'àrea que busquem amb el Teorema de Gauss-Bonet. Per una banda,

$$\int_C K dA = 2\pi\chi(C) = 4\pi$$

I per l'altra banda,

$$\int_C K dA = \int_{C \setminus \overline{S}} 0 + \int_{\mathring{S}} \frac{1}{r^2} dA = \frac{1}{r^2}\ |S|$$

Així doncs, $|S| = 4\pi r^2$.

[1] La frontera entre S i $C \setminus S$ no ens importa perquè després integrarem sobre C i té mesura nul·la.