

Problema 315

Buenos días.

Para este problema es necesario el conocimiento del número de Álvaro, \hat{A} , definido como 0.1234567891011121314... un cero seguido de todos los números naturales en orden.

Sea $\gamma : (0, \infty) \rightarrow T^2$ la curva definida por $\gamma(t) = (e^{2i\pi t}, e^{2i\pi \hat{A} \cdot t})$.

Como bien Álvaro sabe, esta curva es densa sobre el toro, pero no la sabe demostrar, así que tenemos que ayudarlo.

Sea $(e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$ un punto del Toro. Para todo entorno abierto del punto, contiene un subconjunto de puntos de la forma $\{(e^{2i\pi x}, e^{2i\pi t}), t \in [y, y + \varepsilon]\}$. Este ε lo podemos tomar de la forma 10^{-n} .

Claramente, $\hat{t} = \lceil 10^{n+1}y \rceil 10^{-n-1} \in [y, y + \varepsilon]$, ya que $y = 10^{n+1}y 10^{-n-1} \leq \lceil 10^{n+1}y \rceil 10^{-n-1} \leq (10^{n+1}y + 1)10^{-n-1} = y + 10^{-n-1} < y + 10^{-n}$. Entonces, por como hemos definido \hat{A} , existe un número k tal que $\{10^k \hat{A}\}$, sus $n+1$ primeras cifras decimales coinciden con \hat{t} , y por tanto $\{10^k \hat{A}\} - \hat{t} < 10^{-n-1} \Rightarrow \{10^k \hat{A}\} < 10^{-n-1} + \hat{t} < y + 2 \cdot 10^{-n-1} < y + 10^{-n}$ y por tanto tanto $\gamma(10^k) =$