Materón de problemas: Problema 480

Francesco Virgolini

Ñifáuuuuu

Cantar de Mio Donato

Acercaos, buenas gentes,   acercaos a escuchar
esta antigua y gran historia   que ahora os voy a relatar.
Es la gesta de Donato,   finitista sin igual,
desactivador de bombas,   matemático ejemplar.

La gran aventura empieza   cuando por casualidad
los Desmenelaos hallaron   un acertijo genial,
un límite misterioso,   un problema colosal
propuesto por un gran genio   de la España occidental.
Después de días de estudio   y mucho reflexionar,
pensaron que no tendía   hacia un límite real,
que crecía y que crecía   y crecía sin parar,
y de esta forma debía   al infinito llegar.

Mas allí llegó Donato   el finito caballero,
boxeador de Farrawarra,   matemático certero,
aquel del largo cabello,   aquel de los ojos fieros,
de los matfis el más bello,   el más famoso FMEro.
Que se enfrentaba a enemigos   al mismo instante lo supo,

pues eran Desmeneläos   y él, en cambio, melenudo;

mas la talla de la lucha   él muy clara no la tuvo

hasta que les oyó hablar   del concepto más impuro.

Mencionaron "infinito"   y Donato se detuvo,

sus ojos ardiendo en llamas,   su corazón iracundo,

desenvainó la su lengua,   los demás quedaron mudos,

y sus frases aceradas   retumbaron por el mundo:

Si seguís en la herejía   nunca habrá Dios que os asista,

así que escuchadme bien   y tened la mente lista.

Mencionáis el infinito,   del engaño sois artistas,

mas a mí no me embaucáis: "Yo es que soy finitista."

Si tuvieseis más astucia   y un poco más de razón,

veríais que eme igual a cero   ya es prueba de vuestro error,

y me escucharías ansiosos   por saber la solución

para la cual ahora mismo   os daré demostración.

Empecemos viendo que A_m tiende a $A'_m = (a_m/n)\sum_{i=1}^n i^m$ cuando n tiende a infinito. Para verlo, podemos escribir A_m como

$$A_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j i^j = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m}\left(a_j\sum_{i=1}^{n} i^j\right) = A'_m + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m-1}\left(a_j\sum_{i=1}^{n} i^j\right)$$

Ahora, si dividimos entre A'_m, tenemos que los demás sumandos se desvanecen en el límite:

$$lim_{n\to\infty}\left[\frac{A_m}{A'_m}\right] = lim_{n\to\infty}\left[1 + \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{a_j\sum_{i=1}^n i^j}{a_m\sum_{i=1}^n i^m}\right)\right] = 1.$$

Dado que $\int_0^n x^m = n^{m+1}/(m+1)$, podemos usar la correspondencia entre integrales y sumatorios para obtener que:

$$lim_{n\to\infty}A_m = lim_{n\to\infty}A'_m = a_m lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^m\right] = a_m\frac{n^m}{m+1}.$$

Por otro lado, para G_m también tenemos que tiende a $G'_m = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_m i^m)\right)^{1/n}$ cuando n tiende a infinito. Para verlo, podemos escribir G_m como

$$G_m = \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j i^j\right)\right)^{1/n} = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j i^j\right)^{1/n}.$$

Y dividiendo entre G'_m:

$$\frac{G_m}{G'_m} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=0}^{m} a_j i^j}{a_m i^m}\right)^{1/n} = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j}{a_m}i^{j-m}\right)^{1/n}$$

Cada factor es mayor que 1, así que el límite del producto es mayor o igual que 1. Demostraremos que es exactamente 1 viendo que, para cualquier $\varepsilon > 0$, el límite es menor que $1+\varepsilon$. En efecto, existe n_ε tal que $\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j}{a_m}n^{j-m} < \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant n_\varepsilon$. Entonces, el límite es igual al producto de límites:

$$lim_{n\to\infty}\left[\frac{G_m}{G'_m}\right] = lim_{n\to\infty}\left[\left(\prod_{i=1}^{n_\varepsilon-1}\left(1+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j}{a_m}i^{j-m}\right)\right)^{1/n}\right].$$

$$\cdot lim_{n\to\infty}\left[\left(\prod_{i=n_\varepsilon}^{n}\left(1+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j}{a_m}i^{j-m}\right)\right)^{1/n}\right].$$

El primer límite es la raíz enésima de una constante, así que tiende a 1. La expresión dentro del segundo límite es es la media geométrica de expresiones que, por la construcción de n_ε, son menores que $1+\varepsilon/2$; por tanto, la media geométrica también es menor que $1+\varepsilon/2$ y su límite ha de ser menor que $1+\varepsilon$. En conclusión, el límite de G_m/G'_m es 1. Ahora, podemos calcular el límite de G'_m aplicando la fórmula de Stirling para el factorial:

$$lim_{n\to\infty}G_m = lim_{n\to\infty}G'_m = lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}(a_m i^m)\right)^{1/n} = a_m lim_{n\to\infty}(n!)^{m/n} =$$

$$= a_m lim_{n\to\infty}\left[(2\pi n)^{\frac{m}{2n}}(n/e)^m\right] = a_m(n/e)^m.$$

Donde hemos usado que la raíz enésima de n es 1. Finalmente, podemos comprobar fácilmente que $lim_{n\to\infty}[A_m/G_m] = e^m/(m+1)$.

Ya huyen los Desmeneläos   entre llanto, rabia y gritos,

ya se yergue nuestro héroe   tan grandioso como un mito,

mas ve que aún queda en la sala   un desmenelao maldito

cuyo susurro dolido   yo aquí dejo transcrito:

"habéis dado ese argumento   que vos creéis tan bonito,

pero aquesto no demuestra   que no exista el infinito."

Se sonríe el gran Donato,   matemático bendito,

mientras responde con calma: "pues vos me coméis el pito."