Problema 1000

Caso $n=3$:

Cualquier vector en $\mathbb{Q}^3$ de norma 1.

Sea $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^3$ con $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, $a^2+b^2+c^2=d^2$, $\gcd(a,b,c,d)=1$.

Entonces, si en a,b,c hay 3 impares:

$$a^2+b^2+c^2 \equiv 1+1+1 \equiv 3 \pmod 4 \quad \text{no es cuadrado perfecto}$$

Si en a,b,c hay 2 impares:

$$a^2+b^2+c^2 \equiv 1+1+0 \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{no es cuadrado perfecto}$$

Si en a,b,c hay 0 impares:

$$d^2 = a^2+b^2+c^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow d \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow 2 \mid \gcd(a,b,c,d).$$

Por tanto tiene que haber 1 impar entre a,b,c. Esto implica d impar.

Definimos entonces $f: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y tenemos que

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right) \to (a+b+c)d^{-1} \pmod 2$$

$$f\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right) \equiv (1+0+0)1^{-1} \equiv 1 \pmod 2.$$

Como f es morfismo de cuerpos, sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Q}^3$ tales que $\|v_i\|=1$ se tiene: $f\left(\sum_{i=1}^{k} v_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{k} f(v_i) \equiv \sum_{i=1}^{k} 1 \equiv k \pmod 2$.

Por otro lado $f(0) = f\left(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}\right) = 0$.

Por tanto, no existe una sucesión de puntos $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{Q}^3$ tales que $k \equiv 1 \pmod 2$ y $\|P_{i+1}-P_i\|=1$ con $i=1,\dots,k-1$ y $\|P_k - P_1\|=1$. Esto es porque

$$f\left((P_2-P_1)+\dots+(P_1-P_k)\right) \equiv k \equiv 1 \pmod 2$$

Pero

$$f\left((P_2-P_1)+\dots+(P_1-P_k)\right) \equiv f(0) \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{Es contradicción.}$$

Por tanto se puede colorear $\mathbb{Q}^3$ con 2 colores.

Casos $n=1,2,3$ Trivialmente 1 color no es suficiente, y por estar incluidos en $\mathbb{Q}^3$, 2 colores son suficientes, por tanto hacen falta por lo menos dos colores.

Caso $n=6$:

Consideramos los puntos de $\mathbb{Q}^6$

$$\left(0,0,0,0,0,0\right)$$
$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\right)$$
$$\left(0,0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},0,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$
$$\left(\frac{9}{20},\frac{1}{20},\frac{-2}{5},\frac{-1}{10},\frac{3}{4},\frac{-1}{4}\right)$$

Dos cualquiera están a distancia 1. Por tanto al menos 6 colores son necesarios para pintar $\mathbb{Q}^6$.