1012 ZEROS DE RIEMANN

Observamos en primer lugar que el número de Fibonacci F_n cuenta el número de vectores de números $(x_1, \dots, x_N)$, $N \in \mathbb{N}_0$, tales que $x_i \in \{1, 2\}$ y $\sum_{i=1}^{N} x_i = n-1$:

1) El número de vectores que suman $n-1$ es la suma de los que suman $n-2$ y $n-3$, pues se le añade un 1 al final a los que suman $n-2$ y un 2 al final a los que suman $n-3$. Así pues $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. (Observamos que si se le añaden dos 1 al final de los que suman $n-3$, al añadirle el primer 1 se tiene un vector de suma $n-2$ y, por lo tanto, estaríamos repitiendo los vectores que hemos puesto añadiendo un 1 a los que suman $n-2$).

2) Falta ver que F_n cuenta los que suman $n-1$, para eso veamos los casos base.

- $F_0 = 0$: ningún vector puede dar una suma negativa (-1)
- $F_1 = 1$: el vector de longitud $N=0$ es el único que suma 0
- $F_2 = 1$: el vector de longitud $N=1$ y con $x_1 = 1$ suma 1.
- $F_3 = 2$: tenemos los vectores $(1,1)$ y (2). Aquí vemos que se está cumpliendo la recurrencia mencionada anteriormente ya que se le añade un 2 al vector de longitud 0 y un 1 al vector (1).

Dicho esto, vamos a probar la identidad del problema para $n \equiv 1 \pmod 2$ contando las maneras de construir los vectores.

Observamos que como $n \equiv 1 \pmod 2$, $n-1 \equiv 0 \pmod 2$. Así pues el vector $(2, \dots, 2)$ de longitud $\frac{n-1}{2}$ satisface la propiedad. A partir de aquí podemos substituir progresivamente un 2 por dos 1, y la suma queda invariante. Dicho esto, los 1 se pueden colocar en cualquier posición del nuevo vector de longitud $\frac{n-1}{2}+1$, ya que el orden no altera la suma. Así pues podemos construir $\binom{\frac{n-1}{2}+1}{2}$ vectores de esta medida. Si seguimos este proceso hasta substituir $\frac{n-1}{2}$ veces un 2 por dos 1, nos quedamos con el vector $(1, \dots, 1)$ de longitud $n-1$ y habremos contado todos los posibles vectores que suman $n-1$. Así pues, tras substituir k veces un 2 por dos 1 tenemos un vector de longitud $\frac{n-1}{2}+k$ con $2k$ posiciones $x_i = 1$. La cantidad de posibles vectores con tales características es $\binom{\frac{n-1}{2}+k}{2k}$. Finalmente, el total de vectores es la suma de todos los vectores encontrados en cada uno de los $\frac{n-1}{2}$ pasos:

$$F_n = 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}+k}{2k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}+k}{2k}$$

<u>Extra</u> De la misma manera, podemos encontrar el caso $n \equiv 0 \pmod 2$. Esta vez, lo único que cambia es que empezamos con un vector con $\frac{n-2}{2}$ 2 y un 1, de longitud $\frac{n-2}{2}+1 = \frac{n}{2}$. A partir de aquí tenemos $\frac{n-2}{2}$ pasos para cambiar cada 2. Así pues, para n par,

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{\frac{n}{2}+k}{2k+1}$$