Desmenelaos :)

"Fernando Alonso >>> Francisci Virgilini"

Agafem per començar una $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com la de l'enunciat.

Separem continuïtat (en $x_0 \in \mathbb{R}$) en (1) i (2):

$$(1)\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ tq } |x_0-y_\delta|<\delta \Rightarrow f(y_\delta)<f(x_\delta)+\varepsilon$$

$$(2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ tq } |x_0-y_\delta|<\delta \Rightarrow f(y_\delta)>f(x_0)-\varepsilon$$

Suposem que hi ha un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ on (1) és fals (si (2) fos fals, faríem el mateix raonament). Aleshores $\exists \varepsilon>0$, que fixem de manera que:

$$\forall \delta>0\ \exists z \in \mathbb{R} \text{ tq } |x_0-z|<\delta \Rightarrow f(z)\geq f(x_0)+\varepsilon$$

~~El truc està en que ara constr~~

Aprofitarem això per demostrar que $\exists (y_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ tq $\begin{cases} y_k \to x_0 \\ f(y_k)\to f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$

i en particular $f(y_k)=f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$.

Inicialment, z_1 és tq $|z_1-x_0|<1$ i $f(z_1)\geq f(x_0)+\varepsilon$.

Però aleshores, $f(\langle x_0,z_1\rangle)$ és connex i $\begin{matrix} f(z_1)\in f(\langle x_0,z_1\rangle) \\ f(x_0)\in f(\langle x_0,z_1\rangle)\end{matrix}$

$$\Rightarrow f(x_0)+\varepsilon \in f(\langle x_0,z_1\rangle) \Rightarrow \exists y_1 \in \langle x_0,z_1\rangle \text{ tq } f(y_1)=f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Per la resta de termes, sigui z_k tq

$$|z_k-x_0|<\min\left\{\frac{1}{k},|x_0-y_{k-1}|\right\} \text{ i } f(z_k)\geq f(x_0)+\varepsilon.$$

De nou $f(\langle x_0,z_k\rangle)\ni f(x_0), f(z_k)$ connex $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_k)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\in f(\langle x_0,z_k\rangle) \Rightarrow \exists y_k \in \langle x_0,z_k\rangle$$

de manera que $f(y_k)=f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$.

A més, $|y_K - x_0| \leq |z_K - x_0| \leq \frac{1}{K} \Rightarrow \lim_{K\to\infty} y_K = x_0$.

Per tant, $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{K\to\infty} y_K = x_0 \\ \lim_{K\to\infty} f(y_K) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$ i $f(y_K) \neq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall K$.

Ara aprofitem la compacitat.

$A = \{y_1, y_2, \dots, x_0\}$ és fitat i tancat $\Rightarrow$ Compacte

$\Rightarrow f(A) = \{f(y_1), f(y_2), \dots, f(x_0)\}$ és fitat i tancat.

Però $f(y_K) \in f(A) \ \forall K$ i $\lim_{K\to\infty} f(y_K) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \notin f(A)$.

Finalment, feiem un contraexemple que, ~~com diria el senyor [illegible]~~ és tan fàcil que el podria entendre un nen de P3, o fins i tot de P2, que són els únics números que em caldran.

Sobre $X = \{x_1, x_2\}$, un espai de $1+1=2$ elements, defineixo la topologia de Sierpinski $T = \{\phi, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$.

Com que el conjunt és finit, tot $U \in P(X)$ és compakte. I de fet:

ϕ és connex trivialment

$\{x_1\}, \{x_2\}$ són connexos perquè tenen 1 element.

$\{x_1, x_2\}$ si està recobert per oberts, un d'ells és $\{x_1, x_2\} \Rightarrow$ és connex

Així que tot és connex.

Agafem $f: \begin{array}{l} x_1 \mapsto x_2 \\ x_2 \mapsto x_1 \end{array}$ que satisfà l'enunciat però $f^{-1}(\overset{\text{obert}}{\{x_1\}}) = \overset{\text{No obert}}{\{x_2\}} \notin T$ ■

f no contínua