Desmenetaos

"És difícil ser graciós a les 4AM, és més fàcil a les 4:20AM"

~~Bon Fem una demo sense passades, que està de moda~~!

$X_1 :=$ Nombre de cops que borrem abans que es borri el meu 1

$X_2 :=$ " " 2

$\vdots$

$X_n :=$ " " n

$X = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Volem $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X \geq k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 - \Pr(X \leq k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 1 - \Pr(X_1 \leq k)\Pr(X_2 \leq k)\dots\Pr(X_n \leq k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 1 - \Pr(X_1 \leq k)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 1 - (1-(1-p)^k)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} (1-p)^{ik}$$

~~Com abans~~

A més, convergeix absolutament: $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (1-p)^{ik} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^n (1-p)^k = \frac{2^n}{p}$.

Així que intercanviem sumatoris.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^i)^k = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-(1-p)^i} \quad \blacksquare$$

Scanned with CamScanner