Desmenelaos

"e-picardo"

P1011

En l'última ronda de premsa de l'Ada Colau, va argumentar que: "Tot i que pugui empitjorar una mica el tràfic, jo diria que una matriu en cotxe és una cosa molt è-pica".

Això li va inspirar a C_n, i si...

$$C_n = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} 0 & & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0!}A_n^0 + \frac{1}{1!}A_n^1 + \dots + \frac{1}{n!}A_n^n$$

Tot i que Matt (la matriu) està temptat a escriure e^{A_n}, es controla. Esperem una mica. Primer diagonalitzem A_n.

$$\det(xI - A_n) = \det\begin{bmatrix} x & -1 & & \\ & x & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & x \end{bmatrix} = x \det\begin{bmatrix} x & -1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & x \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+1}\det\begin{bmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & x & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(xI - A_n) = x^{n+1} + (-1)^{2n+1} = x^{n+1} - 1$$

Per tant, A_n diagonalitza i els VAPs són arrels $(n+1)$-èsimes de la unitat. Així que:

$$1 = \omega_0,\ e^{\frac{2\pi i}{n+1}} = \omega_1,\ \dots,\ e^{\frac{2\pi i}{n+1}n} = \omega_n$$

$$A_n = S^{-1}DS \Rightarrow C_n = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k\right)S$$

$$\Rightarrow \det C_n = \det\begin{bmatrix} \sum \frac{1}{k!}1^k & & \\ & \sum \frac{1}{k!}\omega^k & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \prod_{l=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\omega_l^k\right)$$

Ara sí, ara sí!! e^{w_ℓ}, però cal contenir-se. No exactament.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} w_\ell^k = e^{w_\ell} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} w_\ell^k =: e^{w_\ell} + Err_\ell$$

$$|Err_\ell| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] < \frac{e}{(n+1)!}$$

Haguent arribat a aquest punt, molts es podrien posar a fer fites intel·ligents, anant amb cura... Però no l'Ada Colau!!!

(Els seus analistes li han recomanat que s'intenti apropar més als joves. I què els agrada als joves? LA FORÇA BRUTA!!!)

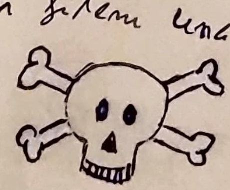
Què fem davant d'un productori? EXPANDIR!!!

$$\prod_{\ell=0}^{n}(e^{w_\ell} + Err_\ell) = \prod_{\ell=0}^{n} e^{w_\ell} + Err_0(\dots) + Err_1(\dots) + \dots + Err_n(\dots)$$

$$= 1 + Err_0(\dots) + Err_1(\dots) + \dots + Err_n(\dots) =: 1 + A$$

Però si això no era prou, com fitem una suma?

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n \cdot \max\{a_i\}$$



En particular, tot sumand de l'expansió del $\prod_{\ell=0}^{n}(e^{w_\ell} + Err_\ell)$ és producte de termes de la forma e^{w_ℓ} i Err_ℓ.

$$|e^{w_\ell}| = e^{Re(w_\ell)} \leq e^1 = e$$

i $|Err_\ell| < \frac{e}{(n+1)!} \leq e$

Així que el mòdul de cada sumand és $\leq$ ($\leq e^n \cdot \frac{e}{(n+1)!}$, si hi ha un Err). I hi han $2^{n+1}-1$.

Aleshores, $\det C_n = 1 + B_n$

on $|B_n| \leq \sum |\text{Summand de } \prod_{k=0}^{n} (w_k + E_{n+1,k}), \text{ dif. de } e^{w_1} \cdots e^{w_n}|$

$$\leq 2^{n+1} e^{n} \cdot \frac{e}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(2e)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \implies \det C_n \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

Com diria l'Ada Colau: "Això ha estat molt è-pic". $\blacksquare$