Problema 1011 — Zeros de Riemann

Lema 1. $a \in \operatorname{Spec}(A)$, $v \in \operatorname{Ker}(A - a\,Id) \Rightarrow Bv \in \operatorname{Ker}(A - a\,Id)$.

Demostración:

~~Como $E = \bigoplus_{b \in \operatorname{Spec}(B)} \operatorname{Ker}(B - b\,Id)$, existen unos únicos $u_1, u_2, \dots, u_k$ no nulos~~ ~~ahora y $b_1, \dots, b_k \in \operatorname{Spec}(B)$ diferentes tal que $u_i \in \operatorname{Ker}(B - b_i Id)$, $i = 1, \dots, k$~~ ~~y $v = u_1 + \dots + u_k$.~~

Entonces $ABv \overset{A \text{ y } B \text{ conmutan}}{=} BAv = Bav = aBv$. Por tanto $Bv \in \operatorname{Ker}(A - a\,Id)$.

Lema 2. Sean $a_i \in \operatorname{Spec}(A)$ distintos, $v_i \in \operatorname{Ker}(A - a_i Id)$, $i = 1, \dots, k$ con $u = v_1 + \dots + v_k$ vep de B de vap b. Entonces $v_i \in \operatorname{Ker}(B - b\,Id)$, $i = 1, \dots, k$.

Demostración:

$$b v_1 + \dots + b v_k = b(v_1 + \dots + v_k) = bu = Bu = B(v_1 + \dots + v_k) = Bv_1 + \dots + Bv_k$$

Sabemos que $bv_i \in \operatorname{Ker}(A - a_i Id)$ y por el lema anterior $Bv_i \in \operatorname{Ker}(A - a_i Id)$, $i = 1, \dots, k$.

Además $E = \bigoplus_{a \in \operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Ker}(A - a\,Id)$, por tanto hay una forma única de poner Bu como suma de veps de vaps distintos.

Esto implica que $bv_i = Bv_i$, $i = 1, \dots, k$. Por tanto $v_i \in \operatorname{Ker}(B - b\,Id)$, $i = 1, \dots, k$.

Conclusión: E descompone en subespacios de VEPs de $(A^{69} + B^{420})^{80085}$.

Demostración:

Sea $v \in E$. Existen $b_1, \dots, b_n \in \operatorname{Spec}(B)$ distintos y $u_1, \dots, u_n$ no nulos con $u_i \in \operatorname{Ker}(B - b_i Id)$ tales que $v = u_1 + \dots + u_n$.

Existen $a_{ij} \in \operatorname{Spec}(A)$ con $a_{ij} \neq a_{ik}$ si $j \neq k$ y v_{ij} no nulos $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m_i)$ con $v_{ij} \in \operatorname{Ker}(A - a_{ij} Id)$ tales que $u_i = v_{i1} + \dots + v_{im_i}$. Por el lema anterior se tiene que $v_{ij} \in \operatorname{Ker}(A - a_{ij} Id) \cap \operatorname{Ker}(B - b_i Id)$. Esto implica que $v_{ij} \in \operatorname{Ker}\left((A^{69} + B^{420})^{80085} - (a_{ij}^{69} + b_i^{420})^{80085} Id\right)$, es decir, v_{ij} es vep de $(A^{69} + B^{420})^{80085}$.

Y $v = u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_n} v_{ij}$. Por tanto, hemos terminado. $\square$