1110

Secta Aleu

Volem trobar el valor de

$$A = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$$

Primer, considerem la sèrie de potències $f(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k\geq 2} \frac{x^k}{(k-1)k}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k(k+1)}{(k-1)k} = 1$$

Llavors el radi de convergència de la sèrie és 1. La sèrie és uniformement convergent en $(-1,1)$, la podem derivar infinits cops i les derivades seguiran sent uniformement convergents en $(-1,1)$.

$$f'(x) = \sum_{k\geq 2} \frac{kx^{k-1}}{k(k-1)} = \sum_{k\geq 2} \frac{x^{k-1}}{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k\geq 2} \frac{(k-1)x^{k-1}}{k-1} = \sum_{k\geq 2} x^{k-2} = \sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Ara integrem per trobar l'expressió de f(x).

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int \frac{1}{1-x}dx + C_1 = -log(1-x) + C_1$$

Utilitzant $f'(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$. $f'(x) = -log(1-x)$.

$$f(x) = -\int log(1-x)dx + C_2$$

$$\int log(1-x)dx = \begin{pmatrix} u = log(1-x) & du = \frac{-1}{1-x}dx \\ dv = dx & v = x \end{pmatrix} = xlog(1-x) - \int \frac{-1}{1-x}dx =$$

$$= xlog(1-x) - \int dx + \int \frac{1}{1-x}dx = xlog(1-x) - x - log(1-x)$$

$$f(x) = -xlog(1-x) + 1 + log(1-x) + C_2$$

Utilitzant $f(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$. $f(x) = -xlog(x-1) + x + log(1-x)$.
Podem evaluar $f(x)$ en $\frac{1}{2}$ perquè $\frac{1}{2} \in (-1,1)$. $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}log(2)$.
Si ens fixem en com està definida $f(x)$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}A$. Per tant, la solució, és

$$\boxed{A = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - log(2)}$$