

XXVII Marató de Problemes

LA MATFISNETA

Problema 1148

Dear reader,

A la MATFISNETA això de liar-nos i generar arestes no se'ns dona gaire bé. Sigui perquè ja tenim les nostres **amants** o perquè encara estem esperant l'inci de la nostra **història d'amor**, a vegades sembla que **oblidem que existeix** el graf. Però, tot i aquesta **trista i tràgica** reputació, el que sí li mola a la MATFISNETA és anar a la pista de ball, amb el seu **estil** únic, i **sacsejar** el chasis fins que el motor estigui **vermell** (no **granat** perquè el motor no és culé). Qui mai va a les festes és el nostre retrovisor **traidor** (m'estic passant amb el hate? culpa seva per **fer-m'ho fer**, és el **karma**, ara toca **venjar-se**).

Per fer aquest problema pensarem en la pista de ball com el pla complex. Els moviments dels balladors es faran sobre els eixos reals i imaginaris (en ambdós sentits). Recordem que multiplicar per i en el pla imaginari equival a fer una rotació de $\frac{\pi}{2}$ respecte l'origen.

Així doncs, comença la cançó i els ballarins es avancen a_0 unitats.

Dale a tu chasis alegría MATFISNETA
Que tus ruedas van y descarrilan MATFISNETA
No descarriles, alegría MATFISNETA
Eh, MATFISNETA, a_1

I aleshores els ballarins fan un quart de volta (un gir de $\frac{\pi}{2}$) i avancen a_1 unitats en aquesta nova direcció (en aquest cas, en el sentit positiu de l'eix imaginari). És a dir, sobre el pla complex els ballarins es desplacen $a_1 i$ unitats.

Dale a tu chasis alegría MATFISNETA
Que tus ruedas van y descarrilan MATFISNETA
No descarriles, alegría MATFISNETA
Eh, MATFISNETA, a_2

De nou els ballarins giraran $\frac{\pi}{2}$, que donaran una rotació en l'angle de desplaçament de π respecte la direcció original. Per tant, durant aquest moviment es desplaçant $a_2 i^2$ unitats.

Dale a tu chasis alegría MATFISNETA
Que tus ruedas van y descarrilan MATFISNETA
No descarriles, alegría MATFISNETA
Eh, MATFISNETA, a_k

És clar que en el $(k+1)$ -èssim moviment (recordem que comptem els moviments des de 1 fins $n+1$, perquè el 0 no és natural) els ballarins es desplaçaran $a_k i^k$ unitats sobre el pla complex.

Dale a tu chasis alegría MATFISNETA
Que tus ruedas van y descarrilan MATFISNETA
No descarriles, alegría MATFISNETA
Eh, MATFISNETA, a_n

Per tant, el desplaçament que faran els ballarins durant tot el polinomi és el següent:

$$\sum_{k=0}^n a_k i^k = p(i)$$

És a dir, que tornaran a l'origen $\iff p(i) = 0$.

I, com $p(x)$ té coeficients reals, $p(i) = 0 \iff x^2 + 1 | p(x)$

Tot i que l'enunciat parla de "tornar a l'origen", observem que si algun dels ballarins comença desplaçat z_0 sobre el pla complex, no **tot ha canviat**. Com que el problema tracta només de desplaçaments (no de posicions), és invariant respecte traslacions de l'origen, i no fa falta **tornar a fer** tots els raonaments d'abans.

I have the honor to be your obedient servant,

C. Seguretat