Problema 1302 Zeros de Riemann

Lema 1: La serie de Taylor centrada en $a \in [0, r)$ converge a f para todo $x \in [a, \frac{a+r}{2})$.

Demostración: Por el teorema de Taylor $\exists \xi_{n} \in [a, x]$ tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Como todas las derivadas de la f son positivas y crecientes, tenemos:

$$\forall y \in [x, r) \quad f^{(n)}(y) = f^{(n)}(x) + \int_x^y f^{(n+1)}(\tau)\,d\tau \geq f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)(y-x) > f^{(n+1)}(x)(y-x).$$

y por inducción:

$$f^{(k)}(y) = f^{(k)}(x) + \int_x^y f^{(k+1)}(\tau)\,d\tau \geq f^{(k)}(x) + \int_x^y \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n-k)!}(\tau-x)^{n-k}\,d\tau =$$

$$= f^{(k)}(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n-k+1)!}(y-x)^{n-k+1} > \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n-k+1)!}(y-x)^{n-k+1}.$$

Por tanto

$$f(r) \geq f(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(r-x)^{n+1} \Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leq (f(r)-f(x))\left(\frac{x-a}{r-x}\right)^{n+1}.$$

Si $x \in [a, \frac{a+r}{2})$ esto implica $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$.

Por tanto, $0 \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leq \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Esto es, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$

Conclusión: La serie de Taylor centrada en 0 converge a f para todo $x \in [0, r - \frac{r}{2^n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Procederemos por inducción, el lema 1 es el caso base $n=1$.

Paso inductivo:

Sea $x \in \left[r - \frac{r}{2^n}, r - \frac{r}{2^{n+1}}\right)$. Tomamos $a \in \left(2x - r, r - \frac{r}{2^n}\right)$.

Entonces por el lema 1:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

y por la hipótesis inductiva:

$$f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} a^k.$$

Derivando:

$$f^{(k)}(a) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{(l-k)!} a^{l-k}$$

Entonces:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{l=k}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{(l-k)!} a^{l-k}}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{(l-k)!\,k!} a^{l-k}(x-a)^k =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l-k}(x-a)^k \overset{\text{Binomio de Newton}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{l!} x^l.$$

Por tanto el Taylor en 0 converge en x a f.

(Incluyendo la exterior)

(*) Podemos cambiar de orden los sumatorios porque las sumas son absolutamente convergentes. Lo son porque son de términos positivos y convergentes. Son convergentes porque al ser los términos positivos, son crecientes y están acotadas por $f(x)$ porque el error $\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ es positivo.