2010 Què calents venen!

Francesco Virgolini

Ñifáuuuuu

Als físics de la sala us sonarà el model d'Ising, l'exemple més estudiat de models de spins en grafs i un dels pilars sobre els quals es sustenta la física estadística moderna. Doncs aquest problema és un exemple del model de Kissing, el seu cosí menys conegut, que va ser proposat i resolt pel cas d'una dimensió l'any 1924 pel físic i matemàtic alemany Ernst Kissing, després d'una festa universitària particularment promíscua. Més tard, l'any 1944, el matemàtic noruec Lars OnéselJager (que degut a les seves aventures etíl·liques com a estudiant encara té prohibit comprar alcohol en tots els Systembolaget dels països escandinaus) va resoldre el model en dues dimensions utilitzant la tècnica de la matriu de transferència de saliva, que avui en dia ja és una tècnica estàndard ensenyada en totes les festes de la facultat de física.

En aquest cas, com el problema és unidimensional, reproduirem a continuació la demostració original de Kissing, que va ser publicada per primer cop en la seva tesi doctoral i ha estat transmesa oralment de generació en generació de físics, juntament amb la mononucleosi. Considerarem que $N \geq 3$, ja que quan la rotllana només té 2 persones no queda clar si interactuen només per una banda o per les dues.

En primer lloc, observem que per calcular el nivell d'excitació que hi ha en tenim prou amb estudiar les parelles d'estudiants consecutius (evidentment, en els temps de Kissing no hi havia poliamor perquè ningú havia pogut llegir *En defensa d'Afrodita*). En efecte, si dividim l'aportació de cada estudiant entre les dues parelles on apareix, tenim que cada parella d'estudiants mirant cap endins aporta 15 hornies, mentre que les parelles de dos cap a fora o un cap a fora i un cap a dins aporten cadascuna 5 hornies. Així doncs, si denotem els estudiants que miren cap a dins amb un 1 i els estudiants que miren cap a fora amb un 0, tenim que l'excitació d'una configuració σ ve donada per $H(\sigma) = 5N + 10 \cdot (\#\text{ parelles } 11 \text{ en } \sigma)$.

Definint la funció de partició $\mathcal{Z}_N$ com la suma de $e^{H(\sigma)}$ sobre totes les configuracions σ possibles amb N estudiants, tenim que

$$\Pr[\text{tots miren cap endins}] = \frac{e^{15N}}{\sum\limits_{\sigma\in\{0,1\}^N} e^{H(\sigma)}} = \frac{e^{15N}}{\mathcal{Z}_N}$$

Així doncs, només hem de calcular quant val $\mathcal{Z}_N$. Per fer-ho, fixarem els spins dels alumnes 1 i N, i calcularem recursivament quant val $\mathcal{Z}$ per les diferents condicions de frontera.

Sigui $\mathcal{Z}_N^{ij} := \sum\limits_{\substack{\sigma\in\{0,1\}^N \\ \sigma_1=i \\ \sigma_N=j}} e^{\tilde{H}(\sigma)-5N}$, on $\tilde{H}(\sigma)$ és com $H(\sigma)$ però sense considerar l'interacció entre els alumnes N i 1 (és a dir, desplegant el cicle en un camí). Aleshores,

$$\mathcal{Z}_N = e^{5N}\left(\mathcal{Z}_N^{00} + \mathcal{Z}_N^{01} + \mathcal{Z}_N^{10} + e^{10}\cdot\mathcal{Z}_N^{11}\right)$$

La gràcia d'expressar-ho així és que podem calcular cada terme recursivament:

$$\begin{pmatrix}\mathcal{Z}_N^{i0}\\ \mathcal{Z}_N^{i1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{Z}_{N-1}^{i0}\\ \mathcal{Z}_{N-1}^{i1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}\mathcal{Z}_2^{i0}\\ \mathcal{Z}_2^{i1}\end{pmatrix}$$

on hem utilitzat que si tenim una configuració que acaba en 0, ~~el Hamilt~~ l'excitació no canvia si eliminem l'últim estudiant, mentre que si acaba en 1, l'excitació disminueix en 10 si el penúltim estudiant també és un 1.

Pel cas base $N=2$, tenim que $\mathcal{Z}_2^{00}=\mathcal{Z}_2^{01}=\mathcal{Z}_2^{10}=1$, mentre que $\mathcal{Z}_2^{11}=e^{10}$. Substituint en la fórmula de $\mathcal{Z}_N$, obtenim

$$\mathcal{Z}_N = e^{5N}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & e^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}1\\ e^{10}\end{pmatrix}\right)$$

Així que

$$\Pr[\text{tots miren cap endins}] = \frac{e^{15N}}{\mathcal{Z}_N} = \frac{e^{10N}}{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & e^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}1\\ e^{10}\end{pmatrix}}$$

Observem: $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

i també $\begin{pmatrix}1 & e^{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ e^{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

Per tant:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & e^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N-2}\begin{pmatrix}1\\ e^{10}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} =$$

$$= \text{traça}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^{N}\right] = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2$$

On $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ són els valors propis de $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}^N$.

$\Rightarrow \hat{\lambda}_i = \lambda_i^N$ on λ_1, λ_2 són els vaps de $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{10}\end{pmatrix}$

És a dir, les arrels de $\lambda^2 - (1+e^{10})\lambda + e^{10} - 1$.

$$\Rightarrow \lambda^{\pm} = \frac{1+e^{10} \pm \sqrt{(e^{10}-1)^2+4}}{2}$$

Per tant la probabilitat que volíem és:

$$\boxed{P = \frac{2^N e^{10N}}{\left(1+e^{10}+\sqrt{(e^{10}-1)^2+4}\right)^N + \left(1+e^{10}-\sqrt{(e^{10}-1)^2+4}\right)^N}}$$