(5.2) Sigui: Cauchy-Schwarz

$B = \{ \frac{k}{2^m} : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \} \cap [0,1)$

$C = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \geq 3 \text{ senar} \} \cap [0,1)$

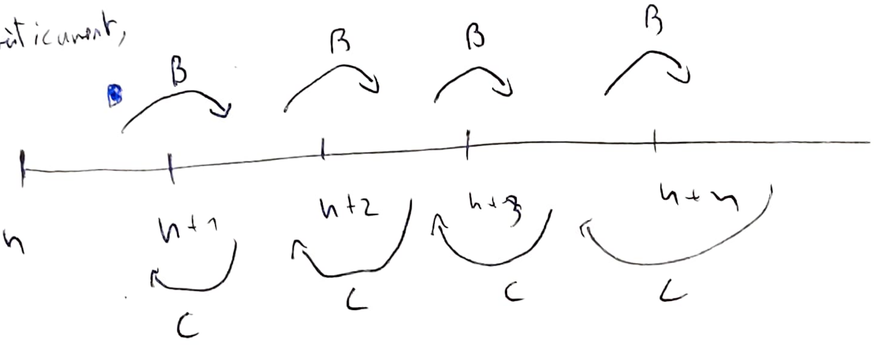
$A = [0,1) \setminus \{B \cup C\}$

Sigui $\varphi : B \to C$ una bijecció qualsevol, que existeix perquè tant B com C són numerables.

Sigui

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \{x\} \in A \\ \lfloor x \rfloor + \varphi(\{x\}) + 1 & \text{si } \{x\} \in B \\ \lfloor x \rfloor + \varphi^{-1}(\{x\}) - 1 & \text{si } \{x\} \in C \end{cases}$$

Esquemàticament,



f és clarament bijectiva per construcció ja que $\mathbb{Z}+A \overset{\mathbb{Z}^+}{\longleftrightarrow} A$ és bijectiu i $B+\mathbb{Z} \longleftrightarrow C+\mathbb{Z}$ també.

Sigui U una bola oberta $\mathcal{B} = (l, r)$. $\forall x \in \mathcal{B} \cap (A+\mathbb{Z}),\ f(x) < r$

$\forall x \in \mathcal{B} \cap (C+\mathbb{Z}),\ f(x) < r$

$\forall x \in \mathcal{B} \cap (\lfloor r \rfloor + B),\ f(x) \geq \lfloor r \rfloor + 1$

Per tant el màxim ha de ser la imatge d'un element de $B + \lfloor r \rfloor$

Ara bé, qualsevol subconjunt de $(B+\varepsilon)$ no té imatge un subconjunt de $(C+\varepsilon+1)$, que té màxim perquè qualsevol subconjunt de C té màxim.