20. Joventuts irrespectuoses

Francesco Virgolini
Fiñáuuuuu

March 5, 2024

Dues solucions:

Suposem que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Llavors $(a/b)^2 = 2$ per $a, b \in \mathbb{N}$. Això implica que per qualssevol primer p tenim $a^2 \equiv 2b^2 \mod p$ i si $(b, p) = 1$ tenim que $x^2 \equiv 2 \mod p$ té solució. Tenim finits p tq $(b, p) = 1$ per tant veient que hi ha infinits p tal que $x^2 \equiv 2 \mod p$ no té solució trobem una contradicció (demostrar que hi ha infinits primers és un exercici pel lector). Ara bé, definint (realment no ho utilitzem) $(\frac{a}{b}) = 1$ si $x^2 \equiv a \mod p$ té solució i -1 si no en té, sabem que es compleix la llei de reciprocitat quadrática (si no sabeu que és i ho busqueu a wikipedia no us quedeu amb el primer que diu que necessitem p, q odd, abaix fica el cas per $q = 2$). Per tant $x^2 - 2$ tindrà solució si i només si $p \equiv \pm 1 \mod 8$. Ara com hi han infinits primers congruents a 3 mòdul 8 hem acabat.

Considereu el polinomi $p(x) = x^4 - 16578x^2 + 1520289 = 0$. Observem que $1520289 = 3^4 137^2$. Observeu que

$$p(3^0 137^0) \neq 0$$
$$p(3^1 137^0) \neq 0$$
$$p(3^2 137^0) \neq 0$$
$$p(3^3 137^0) \neq 0$$
$$p(3^4 137^1) \neq 0$$
$$p(3^0 137^1) \neq 0$$
$$p(3^1 137^1) \neq 0$$
$$p(3^2 137^1) \neq 0$$
$$p(3^3 137^1) \neq 0$$
$$p(3^4 137^1) \neq 0$$
$$p(3^4 137^2) \neq 0$$
$$p(3^0 137^2) \neq 0$$

$$p(3^1 137^2) \neq 0$$
$$p(3^2 137^2) \neq 0$$
$$p(3^3 137^2) \neq 0$$
$$p(3^4 137^2) \neq 0$$
$$p(-3^0 137^0) \neq 0$$
$$p(-3^1 137^0) \neq 0$$
$$p(-3^2 137^0) \neq 0$$
$$p(-3^3 137^0) \neq 0$$
$$p(-3^4 137^1) \neq 0$$
$$p(-3^0 137^1) \neq 0$$
$$p(-3^1 137^1) \neq 0$$
$$p(-3^2 137^1) \neq 0$$
$$p(-3^3 137^1) \neq 0$$
$$p(-3^4 137^1) \neq 0$$
$$p(-3^4 137^2) \neq 0$$
$$p(-3^0 137^2) \neq 0$$
$$p(-3^1 137^2) \neq 0$$
$$p(-3^2 137^2) \neq 0$$
$$p(-3^3 137^2) \neq 0$$
$$p(-3^4 137^2) \neq 0$$

Per tant aquest polinomi no te arrels racionals.
En canvi observem que $p(42\sqrt{2} + 69) = 0$ i per tant $42\sqrt{2} + 69$ no és racional. Ara be si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ llavors $42\sqrt{2} + 69 = \frac{42a+69b}{b}$ i seria racional, amb el que hem acabat.