PAPPUS FC BLOC II 126

Considerem la topologia usual

$$\begin{cases} f \text{ contínua} \\ f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \\ f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbb{R}) \subset \underbrace{f(\mathbb{Q})}_{\text{numerable}} \cup \mathbb{Q} \leftarrow \text{numerable}$$

$$\begin{cases} f \text{ contínua} \\ \mathbb{R} \text{ connex} \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbb{R}) \text{ connex}$$

Un conjunt numerable és disconnex $\Longrightarrow |f(\mathbb{R})| = 1$

$\Longrightarrow f(\mathbb{R}) = y \in \mathbb{R}$ CONTRADICCIÓ! perquè la imatge de $\mathbb{Q}$ ha de ser diferent que la imatge de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

En la topologia grollera (com a espai d'arribada):

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{gr} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \pi & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

és contínua.