CAUCHY-SCHWAG

P. 36

Sigui $i,j \in \mathbb{N}^+$. Suposem $i\alpha > j\beta$. Aleshores: (usant $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \Rightarrow \alpha+\beta=\alpha\beta$)

$$0 < i\alpha-\beta j = (i+j)\alpha - j(\alpha+\beta) = (i+j)\alpha - j\alpha\beta = [(i+j)-\beta j]\underbrace{\alpha}_{>0} \Rightarrow (i+j)-\beta > 0$$

$$0 < i\alpha-\beta j = i(\alpha+\beta) - (i+j)\beta = i\alpha\beta - (i+j)\beta = [i\alpha-(i+j)]\underbrace{\beta}_{>0} \Rightarrow i\alpha-(i+j) > 0$$

$$\Rightarrow j\beta < i+j < i\alpha. \quad (*) \quad (\text{on } i+j \in \mathbb{Z}^+)$$

Similarment, si $j\beta > i\alpha$, obtenim $j\beta > i+j > i\alpha$.

Si $j\beta = i\alpha$, aleshores $\underset{\in\mathbb{Q}}{\frac{j}{i}} = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha-1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \Rightarrow \times$

Per tant, o bé $i\alpha > j\beta$ o bé $j\beta > i\alpha$. Com que hi ha un enter al mig, aleshores $\lfloor i\alpha \rfloor \neq \lfloor j\beta \rfloor$. WLOG suposem $\alpha \in (1,2)$. (Si algun és més petit que 1, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>1$. Si els dos són majors que 2, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$).

Suposem que $m \in \mathbb{N}$ és tal que $\nexists i \in \mathbb{N}$, $\lfloor i\alpha \rfloor = m$. Aleshores, $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $\lfloor i\alpha \rfloor = m-1$, $\lfloor (i+1)\alpha \rfloor = m+1$ (ja que $\alpha \in (1,2)$). Aleshores:

$$i\alpha < m < (m-i)\beta, \quad (i+1)\alpha > m+1 > (m-i)\beta \quad \leftarrow \text{per } (*)$$

$$\Rightarrow m < (m-i)\beta < m+1 \Rightarrow \lfloor (m-i)\beta \rfloor = m.$$

Per tant $\forall m \in \mathbb{N}$ o bé $\exists i$ tq $\lfloor i\alpha \rfloor = m$ o bé $\exists j$ tq $\lfloor j\beta \rfloor = m$, així que a cada classe hi anirà exactament un dels dos.