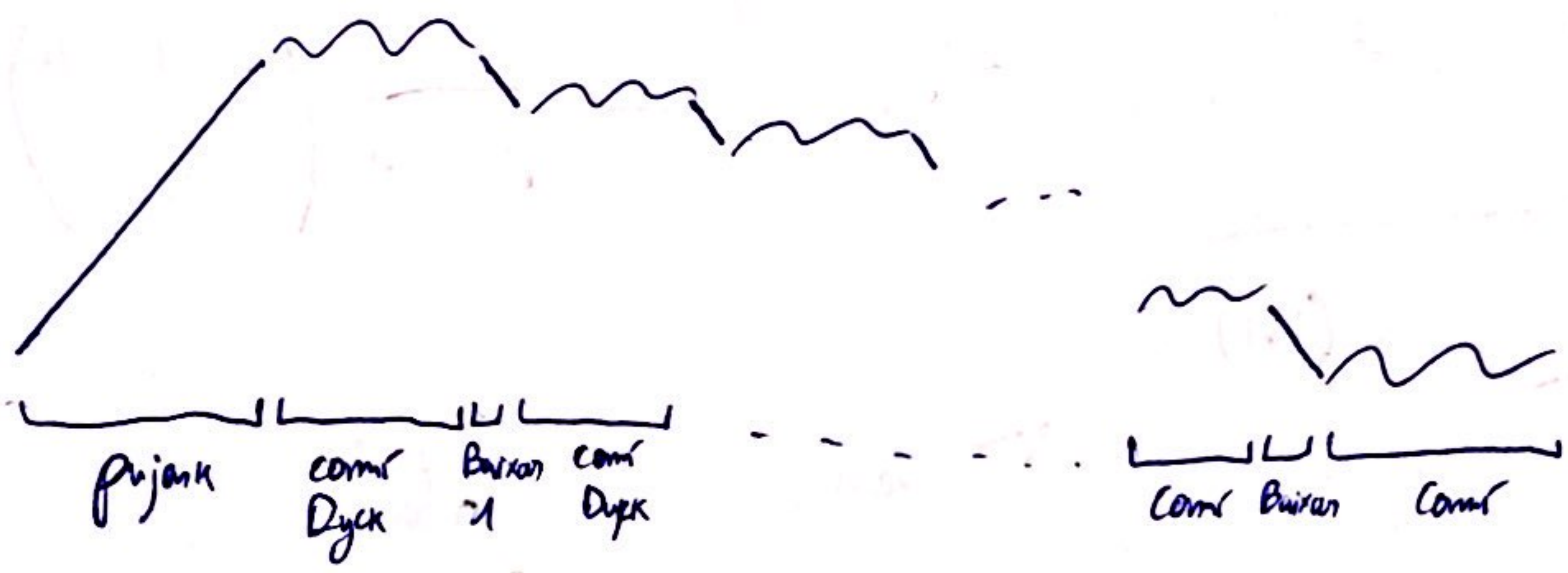
P551 — CAUCHY-SCHWAG

Definim $F_K(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n,K} z^n$ on $a_{n,K}$ = # camins de Dyck de longitud n on les pujades van en grups de K.

Aleshores:



Un camí de Dyck es pot expressar com:

$$\text{"pujar K"} + \underbrace{\underbrace{\text{camí Dyck} + \text{"baixar 1"}} + \cdots + \underbrace{\text{camí Dyck} + \text{"baixar 1"}}}_{K \text{ (baixem 1 K cops)}} + \text{camí Dyck}$$

En notació simbòlica, si $\mathcal{D}_K$ és la classe de camins de Dyck:

$$\mathcal{D}_K = \underset{\text{camí buit}}{\{\emptyset\}} + \underset{\text{pujar K}}{\{\nearrow\}^K} \times \underset{\text{fer un camí i baixar 1}}{\left(\mathcal{D}_K \times \{\searrow\}\right)^K} \times \underset{\text{fer un camí "al tornar"}}{\mathcal{D}_K}$$

I per tant: $F_K(z) = 1 + z^K \cdot \left(F_K(z)\cdot z\right)^K \cdot F_K(z) = 1 + z^{2K} F_K(z)^{K+1}$.

De l'expressió recursiva traiem que els coeficients $a_{n,K}$ no nuls són aquells tals que n és múltiple de 2K.

Podem definir: $G_K(z) = \sum_{n\geq 0} a_{2Kn,K} z^n$, que compleix: $G_K(z^{2K}) = F_K(z)$, i per tant:

$G_K(z) = 1 + z\, G_K(z)^{K+1}$. Definim $A(z) = z\, G_K(z^{K+1})$, $\phi(z) = 1 + z^{K+1}$.

Aleshores: $A(z) = z\, G_K(z^{K+1}) = z\left(1 + z^{K+1} G_K(z^{K+1})^{K+1}\right) = z\left(1 + A(z)^{K+1}\right) =$

$= z\, \phi(A(z))$.

Com que $[z^0]\,\Phi(z) \neq 0$, podem aplicar el teorema d'inversió de Lagrange:

$$\boxed{a_{2nk,k}} = [z^n]\,G_k(z) = [z^{n(k+1)+1}]\,A(z) \underset{\uparrow}{=} [z^{n(k+1)}]\,\frac{1}{n(k+1)+1}\,\Phi(z)^{n(k+1)+1} =$$

T^a inversió de Lagrange

$$= \frac{1}{n(k+1)+1}\,[z^{n(k+1)}]\,\left(1+z^{k+1}\right)^{n(k+1)+1} = \frac{1}{n(k+1)+1}\binom{n(k+1)+1}{n} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{nk+1}\binom{n(k+1)}{n}}$$ ← Nombre de Catalan generalitzat