Phi

Autistas CFIS ALEU

March 2024

Theorem 1. *Para todo entero $n \geq 1$, $\varphi^{2^n} + \varphi^{-2^n} \in \mathbb{Z}$.*

Proof. Lo probaremos por inducción. Como caso base,

$$\varphi^2 + \varphi^{-2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3$$

Ahora la inducción,

$$\varphi^{2^{n+1}} + \varphi^{-2^{n+1}} = (\varphi^{2^n} + \varphi^{-2^n})^2 - 2 \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Ahora solo falta decir que como cad uno de los sumandos es entero,

$$a_m := \sum_{i=m}^{m+1011} \varphi^{2^i} + \varphi^{-2^i} \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

Claramente estos números son suma de 2024 potencias distintas de Phi, y luego tienen 2024 unos en base Phi. Solo falta ver que son distintos, que es cierto porque si $x > y$, entonces

$$\varphi^{2^{x+i}} + \varphi^{-2^{x+i}} > \varphi^{2^{y+i}} + \varphi^{-2^{y+i}} \forall i \in \mathbb{N} \implies a_x = \sum_{i=0}^{1011} \varphi^{2^{x+i}} + \varphi^{-2^{x+i}} > \sum_{i=0}^{1011} \varphi^{2^{y+i}} + \varphi^{-2^{y+i}} = a_y$$

, donde la primera desigualdad sale de que la derivada de $\varphi^x + \varphi^{-x}$ es $\varphi^{-x}(\varphi^{2x} - 1)\ln(\varphi)$, que es estrictamente positiva para $x > 0$ y pues por eso es creciente Luego los infinitos términos de esta secuencia son expresables de la manera que toca y la base Phi está basadísima.