962. Believer Pepperoni

No em sé les propietats de les cotangents, però sí sé que $z, z' \in \mathbb{C} \Rightarrow \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

Nota que

$$\sum_{n=1}^{2024} \cot^{-1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} 2k\right) = \sum_{n=1}^{2024} tg^{-1}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right),$$

i $tg^{-1}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ és l'argument de $n^2+n+1+i$. Per tant $\sum_{n=1}^{2024} tg^{-1}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ és l'argument de $\prod_{n=1}^{2024}(n^2+n+1+i)$. Si escribim

$$\prod_{n=1}^{2024}(n^2+n+1+i) = a_{2024} + b_{2024} i,$$

el valor que busquem és obviament $\frac{a_{2024}}{b_{2024}}$. En concret demostrarem (via inducció) que $\forall K \in \mathbb{N}$ es té que $\frac{a_K}{b_K} = \frac{\cancel{b_K}\, K+2}{K}$, el que implicarà que la suma buscada val

$$\boxed{\frac{1013}{1012}}.$$

Cas base $K=1$ és trivial, ja que el nostre productori val $3+i$, i ~~la seva~~ per tant $3 = 1+2$.

Ara assumeix que la cotangent de

$$\prod_{n=1}^{K}(n^2+n+1+i) \quad \text{és} \quad \frac{K+2}{K}.$$

Això implica que l'argument de

$$\prod_{n=1}^{K+1}(n^2+n+1+i) \quad \text{és el de:}$$

$$(K+2+Ki)\cdot\left((K+1)^2+(K+1)+1+i\right) =$$

$$= K^3+5K^2+8K+6+i(K^3+3K^2+4K+2).$$

Ara, $$\frac{K^3+5K^2+8K+6}{K^3+3K^2+4K+2} = 1+\frac{2(K^2+\cancel{2K}+2)}{(K^2+\cancel{2K}+2)(K+1)} =$$

$$= \boxed{\frac{K+3}{K+1}}.$$

Per tant queda demostrat.