Homogenis

dariogol.com Martínez

March 2024

Polinomi homogeni $\equiv$ Polinomi homo $\equiv$ Polinomi Víctor x Nistal

Anem buscant la contradicció. Suposem que tenim polinomis no constants P, Q tals que $P \cdot Q = f$. Sigui $min \deg P$ el mínim grau d'un terme de P. Utilitzem els fets coneguts de que $\deg PQ = \deg P + \deg Q$ i $min \deg PQ = min \deg P + min \deg Q$.

Per una banda tenim $m + 1 = \deg f = \deg PQ = \deg P + \deg Q$. Per altra banda $m = min \deg f = min \deg PQ = min \deg P + min \deg Q$.

Per tant tenim que $1 = \deg P + \deg Q - (min \deg P + min \deg Q) = (\deg P - min \deg P) + (\deg Q - min \deg Q)$ implica que al menys un de P, Q és Víctor x Nistal. Sense pérdua de generalitat, direm que P és Víctor x Nistal. Per altra banda, la mateixa ecuació implica que $\deg Q - min \deg Q = 1$, i per tant podem descomposar Q en dos polinomis $Q = Q_1 + Q_2$ de forma que els dos siguen Víctor x Nistal i que $\deg Q_2 > \deg Q_1$.

Finalment ens queda que $f_1 + f_2 = f = P(Q_1 + Q_2) = PQ_1 + PQ_2$. Com que P, Q_1, Q_2 sòn Víctor x Nistal, PQ_1 i PQ_2 també ho son. Com que f_1, f_2 també ho son, i $\deg f_1 < \deg f_2$ i $\deg PQ_1 < \deg PQ_2$ necesariamente tindrem $f_1 = PQ_1, f_2 = PQ_2$, però això implica que P divideix als dos polinomis, i per tant contradiu l'hipotesi de que no tenen divisors comuns. Contradicció.