P462 Euler 2

f no contínua a cap punt.

Si $x \in \mathbb{Q}$ $f(x) \neq 0 \Rightarrow$ Cal que en un entorn de x $f(x)$ no s'anul·li, però podem agafar una successió d'irracionals amb límit x i f s'anul·la en aquesta successió. $\Rightarrow\!\Leftarrow$.

Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, considerem la successió

$a_n = \dfrac{A_n}{2^n}$, on A_n és l'enter imparell més proper a $x \cdot 2^n$ de tots els enters imparells. a_n està ben definida per ser x irracional, i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\exists$ i val x.

$f(a_n) = \cos(2^n)$, ~~caldria que $\exists\, n_0$ tq $\forall n \geq n_0$~~.

Sigui $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. Caldria que $\exists\, n_0$ tq si $n \geq n_0$ aleshores $f(a_n) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Però si $\cos(2^n) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\cos(2^{n+1}) = \cos(2 \cdot 2^n) = 2\cos^2(2^n) - 1 \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\left((-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to (0, \varepsilon^2) \to (0, 2\varepsilon^2) \to (-1, 2\varepsilon^2 - 1) = \left(-1, -\tfrac{7}{8}\right) \right)$$

$\Rightarrow\!\Leftarrow$. $-\dfrac{7}{8} < -\dfrac{1}{4}$

Hem acabat.