Backgammon

Autistas CFIS ALeu

March 2024

Diremos que es el turno de un jugador si él puede duplicar y el otro no. Inicialmente no es el turno de nadie, pero en cuanto alguien duplique por primera vez siempre será el turno de alguien.

Cuando es el turno del rival no puedes hacer nada, y cuando es tu turno la estrategia óptima claramente consistirá en duplicar cuando tu probabilidad de victoria sea un cierto valor p.
Asumimos que ambos jugadores juegan óptimamente (es decir , para el mismo valor de p que hace que estén en equilibrio). Si lo hacen bien, debe ocurrir que cuando un jugador intente duplicar, el valor esperado de aceptar la duplicación y el de rendirse sean el mismo.

Luego el valor esperado cuando la probabilidad de victoria llega a p en tu turno es $+1$, lo que ganarías si intentas duplicar y el otro tío se rinde.

Si la probabilidad de victoria es p, la probabilidad de perder es $(1-p)$ y la de que la posición llegue a ser $1-p$ pero acabes ganando es $(1-p)*\frac{1-p}{p}$. Luego la probabilidad de que la posición llegue a ser en algún momento $1-p$ (y por tanto el otro tío intente duplicar) es $(1-p)+\frac{(1-p)^2}{p}$ El valor esperado si el otro tío acepta la duplicación es por tanto:

$$1 = E(p) = 2\left(-\left((1-p)+\frac{(1-p)^2}{p}\right)E_p + \left(1-(1-p)-\frac{(1-p)^2}{p}\right)\right)$$
$$= 2-4\left((1-p)+\frac{(1-p)^2}{p}\right) \implies (1-p)+\frac{(1-p)^2}{p} = \frac{1}{4} \implies p = \frac{4}{5}$$

Luego cuando es el turno de alguien, ese alguien duplicará cuando su probabilidad de victoria llegue a $4/5$. Ahora falta ver que se hace cuando aun no es el turno de nadie.

Sea ahora q la probabilidad con la que duplicas si el turno no es de nadie. De nuevo si te rechazan tu valor esperado debería ser el mismo que si aceptan, y si te rechazan claramente el valor esperado es 1. Si te aceptan, la probabilidad de perder será $1-q$, la de llegar a la posición $1-p$ y después ganar será $\frac{(1-q)(1-p)}{p}$, luego la probabilidad de llegar a $1-p$ será $1-q+\frac{(1-q)(1-p)}{p}$. Luego nos queda

$$1 = E(q) = 2\left(-\left((1-q)+\frac{(1-p)(1-q)}{p}\right)E_p + \left(1-(1-q)-\frac{(1-p)(1-q}{p}\right)\right)$$

$$= 2-4\left((1-q)+\frac{(1-p)(1-q}{p}\right) \implies (1-q)+\frac{(1-p)(1-q)}{p}=\frac{1}{4} \implies q=\frac{4}{5}$$

(de hecho esto es la misma ecuación de antes pero cambiando algunas p por q). Luego en el caso de que no sea turno de nadie también se duplicará cuando la probabilidad a tu favor sea $\frac{4}{5}$. Por tanto, la estrategia óptima es esa.