P 1716

CAUCHY-SCHWAG

Suposem que la matriu és 2×2, $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Suposem que A="Jordi" comença i B="Xavier" és el segon. Aleshores o bé A guanya al primer torn, o bé guanya si $S=a+b+c+d$ és senar.

En cas contrari, guanya B.

Cas 1: Suposem que algun element és 0 (WLOG $c=0$). Aleshores $\det(M)=ad$. Si a o $d=1$ aleshores A guanya al primer torn, així que suposem $a,d\geq 2$. Cap dels dos voldrà baixar a o d a 1 ja que l'altre guanyaria, per tant la matriu acabarà prenent la forma $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (on cada un evita perdre a cada torn). Per tant, el joc acabarà en $S-2$ torns. Si acaba en una quantitat senar de torns (S senar) guanya A, alternativament guanya B.

Cas 2: Tots els elements són >0. Podem veure que qualsevol dels dos pot evitar que l'altre aconsegueixi $\det(M)=0$ sense que hi hagi una fila de zeros. És a dir, es pot evitar que $M=\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix}$ amb $\underset{\lambda\geq 1,\lambda\in\mathbb{N}}{a,b>0}$. En aquest cas, passaran els torns fins que un element sigui 0 i tornant al cas 1, acabem amb la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $S-2$ passos, cosa que acaba la demostració. Només cal veure que es pot evitar el cas $M=\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix}$, ~~en~~ Dos torns anteriors, es pot suposar per simetria entre a i b que la matriu era de la forma: $\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b & \lambda b \end{pmatrix}$ o bé $\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a \\ b & \lambda b+1 \end{pmatrix}$ o bé $\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a \\ b+1 & \lambda b \end{pmatrix}$ o bé $\begin{pmatrix} a & \lambda a+1 \\ b & \lambda b+1 \end{pmatrix}$.

(Nota: per matrius 3×3 el resultat és fals. Contraexemples:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, guanya B al seu primer torn faci el que faci A, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, guanya B al seu primer torn faci el que faci A)

Cas 2.1: $M=\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b & \lambda b \end{pmatrix}$ $\left(\lambda \geq 2 \text{ ja que } \det M \neq 0\right)$. Aleshores A pot triar el canvi $\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b-1 & \lambda b \end{pmatrix}$ i B no podria guanyar: ~~excepte si triar~~

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a \\ b-1 & \lambda b \end{pmatrix} = b+\lambda a > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a & \lambda a+1 \\ b-1 & \lambda b \end{pmatrix} = \lambda a - b + 1 \neq 0 \Leftrightarrow b = \lambda a+1$$

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b-1 & \lambda b-1 \end{pmatrix} = \lambda b - a + \lambda a - b = \underbrace{(\lambda-1)}_{>0}\underbrace{(a+b)}_{>0} > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b-2 & \lambda b \end{pmatrix} = \lambda ab + \lambda b - \lambda ab + 2\lambda a - b + 2 = (\lambda-1)b + 2(\lambda a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-2(\lambda a+1)}{\lambda-1} < 0$$

(no pot ser!)

Si A tria el canvi $\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b & \lambda b-1 \end{pmatrix}$, aleshores:

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a \\ b & \lambda b-1 \end{pmatrix} = \lambda b - a - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda b = a+1$$

$$\det\begin{pmatrix} a & \lambda a+1 \\ b & \lambda b-1 \end{pmatrix} = -a-b < 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b-1 & \lambda b-1 \end{pmatrix} = -a + \lambda b + \lambda a - b = \underbrace{(\lambda-1)}_{>0}\underbrace{(a+b)}_{>0} > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b & \lambda b-2 \end{pmatrix} = -2a - 2 + \lambda b - b = (\lambda-1)b - 2(a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2(a+1)}{\lambda-1}$$

Per tant, si $b=\lambda a+1$, A triarà el segon canvi. Aleshores:

$$\lambda b = \lambda(\lambda a+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda > 1}}{>} a+1$$

$$\frac{2(a+1)}{\lambda-1} = b \Leftrightarrow \frac{2(a+1)}{\lambda-1} = \lambda a+1 \Leftrightarrow 2a+2 = (\lambda-1)(\lambda a+1) \cancel{\geq \lambda a+1} = \begin{cases} 2a+1 & \text{si } \lambda = 2 \\ \geq 2\cdot(3a+1) & \text{si } \lambda \geq 3 \end{cases}$$

$\lambda \geq 2$

i per tant B no podrà acabar. Si $b \neq \lambda a+1$, aleshores A tria la primera opció. Per tant, tot final de la forma M que provingui de $\begin{pmatrix} a+1 & \lambda a+1 \\ b & \lambda b+1 \end{pmatrix}$ és evitable. La resta de casos es fan igual i es deixen com a exercici pel lector.