§1 13. El joc dels anells.

Moltes gràcies a qui sigui que ha proposat això per posar l'únic problema mitjanament normal de la llista. Literalment que mitja llista dona mal de cap de pensar-hi.

Digali A i B a l'Antolin i el Goodjoan, respectivament. Digues que un nombre és *guanyador* sii A té estratègia guanyadora quan n és aquest nombre, i *perdedor* en el cas contrari. Demostrarem que l'únic perdedor és el 2. És obvi que el 2 és perdedor. Digues que el 1 és guanyador, per conveni.

Primer observa que tots els $n \neq 2$ parells són guanyadors, ja que A pot escriure $n/2$ en el seu primer torn, i ara B està forçat a escriure 0. A partir d'ara, suposa n senar.

Farem servir inducció forta en el nombre de divisors primers de n (contant amb multiplicitat) per veure que tot n senar és guanyador. Fem servir que $\phi(n)$ és parell per tot $n \neq 2$. Això és obvi i segueix trivialment de la fòrmula per ϕ.
La estratègia per A és anar escribint nombres comprimers a n. Com $\phi(n)$ és parell, serà B el primer que es veurà forçat a escriure un nombre no coprimer a n. Suposa que aquest nombre és k. Si $k \equiv 0 \pmod{n}$ ja estem. Altrament, sigui $g \coloneqq \gcd(n, k)$. Fixa't que la situació actual és isomorfa a una partida que acabi de començar, amb A jugant primer, a l'anell $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$. Per tant, per hipòtesi d'inducció, com g clarament és també senar, obtenim que A té estratègia guanyadora. $\square$