

Problema 11

Cauchy-Schwag 🤪

March 8, 2024

Primer els presoners posen \mathbb{R} en bijecció f amb \aleph_1 . Com que assumim la hipòtesi del continu, qualsevol ordinal més petit que \aleph_1 serà numerable. En particular, per tot $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ té una quantitat numerable d'ordinals menor o iguals a ell. Sigui T_x el conjunt de reals y de manera que $f(y) \leq f(x)$. A més, per cada $x \in \mathbb{R}$ els presoners es posen d'acord en una bijecció g_x del conjunt T_x amb \mathbb{N} .

Aleshores, l'estratègia que fan servir és la següent. Si veuen dos números x, y , agafen el que té valor de f més gran (suposem que és x) i escriuen tots els elements z de T_x tals que $g_x(z) \leq g_x(y)$, que és una quantitat finita.

Ara justifiquem que sempre funcionarà. Dels tres presoners, un tindrà el número amb f més gran, suposem que és el primer, que té a endavant. Els altres dos presoners tindran números de T_a i d'aquests dos n'hi haurà un que té major valor de g_a , suposem que són b, c i $g_a(b) \geq g_a(c)$. Aleshores el presoner que té c endavant escriurà tots els números de T_a amb valor de g_a menor o igual a $g_a(b)$ i en particular escriurà c . ■