AUTISTAS AL EU CFIS

495

Volem $a^2+(-bc)a+(b+c)=0$

És una equació quadràtica amb solucions a, d. d també enter ja que $d=bc-a$ per equacions de Cardano-Vietta.

Per tant, per Cardano-Vietta tenim les següents equacions amb els coeficients que són un $\Leftrightarrow$ amb el problema:

$$\boxed{\begin{cases} a+d=bc \\ ad=b+c \end{cases}}$$

WLOG sigui a el enter amb mòdul més gran entre els 4 nombres.

$$|a||d|=|ad|=|b+c|\leq|b|+|c|\overset{\text{Suposició}}{\leq} 2|a|$$

$$\Rightarrow |d|\leq 2$$

<u>Cas 1</u>

$|d|=2 \Rightarrow$ es déven complir totes les igualtats de la cadena

$$\Rightarrow |a|=|b|=|c|$$

Com b,c també són els enters amb mòdul + gran, amb el argument anterior $|b|,|c|\leq 2$

$$\Rightarrow |a|=|b|=|c|=|d|=2$$

El qual veient les posibilitats amb els signes sols ens deixa una única solució $\underline{a=b=c=d=2}$

<u>Cas 2</u>

$|d|=1$. d no pot ser -1 ja que 3 dels 4 nombres entre a,b,c i d déven ser positius enters i així implicaria $-a=b+c$

Per tant $d=1$:

$$\left.\begin{aligned} a+1&=bc \\ a&=b+c \end{aligned}\right\} \Rightarrow b+c+1=bc \Rightarrow 2=(b-1)(c-1)$$

$\Rightarrow$ WLOG $\quad (b-1) = 1$

$(c-1) = 2$

$\Downarrow$

$\begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 5$

(Als signes deuen ser + ja que 3 de 4 son $\mathbb{Z}^+$)

Traiem les solucions

$a = 5 \quad b = 2 \quad c = 3 \quad d = 1$

El qual ens dona (amb les permutacions) les següents solucions per l'equació original:

$(a, b, c) =$
$(5, 2, 3)$
$(1, 2, 3)$
$(5, 3, 2)$
$(1, 3, 2)$
$(3, 5, 1)$
$(2, 5, 1)$
$(3, 1, 5)$
$(2, 1, 5)$

Cas 3

$|d| = 0 \Rightarrow d = 0$

$\Rightarrow 0 = b + c$

Contradicció ja que 3 dels 4 nombres tenim que ser positius enters.