P924. Supertopología

Anal Turing

Dado un $\varepsilon \in (0,1]$ real, definimos

$$U_\varepsilon = \{\varnothing, \mathbb{Q}\} \cup \{B(r) \cap \mathbb{Q} : r \leq \varepsilon\}$$

donde $B(r)$ es el intervalo $(-r, r)$.

Observamos que U_ε es una topología sobre $\mathbb{Q}$ para todo $\varepsilon \in (0,1]$ real.

Consideramos ahora el siguiente conjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$:

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathcal{P}(\mathbb{Q})\} \cup \{U_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1]\}$$

que es topología de $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, porque incluye al vacío y al total, y, dados $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ y $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$

$$\bigcup_{i\in I} U_{\varepsilon_i} = U_{\sup_{i\in I} \varepsilon_i} \qquad \bigcap_{j=1}^{n} U_{\varepsilon_j} = U_{\min_{i\in[n]} \varepsilon_i}$$

Por tanto, $\mathcal{T}$ es una topología de $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, infinita no numerable, y sus elementos son topologías sobre $\mathbb{Q}$.

<u>924 - Supertopologia</u>

Cauchy-Schwarz

Primer fem una ordenació $q_1, q_2, q_3, \dots$ de $\mathbb{Q}$. Sigui $I_k = \{q_1, \dots, q_{2k}\}$

Considerem topologies de la forma

$$\phi, \underbrace{\begin{cases}\{q_1\}\\ \{q_2\}\end{cases}}_{\text{un d'ells, dos o cap}}, I_1, \begin{cases} I_1 \cup \{q_3\} \\ I_1 \cup \{q_4\}\end{cases}, I_2, \begin{cases} I_2 \cup \{q_5\} \\ I_2 \cup \{q_6\}\end{cases}, I_3, \dots, \mathbb{Q}$$

Tenim una elecció entre quatre possibilitats per cada $I_k \cup \{q_{2k+1}\}, I_k \cup \{q_{2k+2}\}$ on $k \in \mathbb{Z}^+$.

És clar que són topologies, el nombre d'eleccions és $|\{1,2,3,4\}^{\mathbb{N}}| \equiv$ No numerable.

I per com estan construïdes, la intersecció arbitrària o unió arbitrària torna a ser topologia del mateix tipus.

One Man Orchestra

Sigui S una família de subconjunts de $\mathbb{Q}$ amb les següents propietats:

— Donats $A,B\in S$, es té $A\subseteq B$ o $A\supseteq B$
— Donats $A_i\in S$, $\cup A_i\in S$ Denotem per $F(A)=\{B\in S \mid B\subseteq A\}$

La topologia que proposo és la següent: $T=\{F(A)\cup\{\varnothing,\mathbb{Q}\} \mid A\in S\} \cup \{\varnothing,P(\mathbb{Q})\}$

Cal veure moltes coses:
En primer lloc, $|T|=|S|$ que discutirem després quant és. Ara cal veure que els seus elements són topologies i que ell mateix és topologia. Sigui $U\in T$. Si $U=P(\mathbb{Q})$, és la discreta. En qualsevol altre cas, és de la forma $F(A)\cup\{\varnothing,\mathbb{Q}\}$. Cal veure que això és una topologia, i el buit i el total hi són. La unió i la intersecció són trivials si involucren $\varnothing$ o $\mathbb{Q}$. En cas contrari, les unions/interseccions funcionen:
$B\in F(A),\ C\in F(A)\Rightarrow B\subseteq A,\ C\subseteq A\Rightarrow B\cap C\subseteq A\Rightarrow B\cap C\in F(A)$ $B_\square\in F(A)\Rightarrow B_\square\subseteq A\Rightarrow \cup B_\square\subseteq A\Rightarrow \cup B_\square\in F(A)$
Ara cal veure que T en sí és una topologia, i veiem que ja té el buit i el total. Les unions/interseccions funcionen ja que $F(A)\cap F(B)=F(A\cap B)$ i $\cup F(A_i)=F(\cup A_i)$, (i $A\cap B\in S$ perquè és A o B).

El que manca ara és trobar un tal subconjunt S no numerable. Com a S, proposem $\{ (-\infty,r)\cap\mathbb{Q} \mid r\in\mathbb{R} \}$, que òbviament compleix les propietats i és no numerable.