792. ∞ cerca, ∞ lango

Cauchy-Schwaz

Demostrarem que la família $\{p(x) + \frac{1}{n}\sin(mx) : p \in \mathbb{Q}[x],\ n, m \in \mathbb{Z}^+\}$ és infinitament xapa sobre $\mathcal{C}([a,b])$.

Sigui $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ i pel teorema de Weierstrass $\exists q \in \mathbb{R}[x]$ tq

$\|q - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Si $q(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, agafem $p(x) = \sum_{i=0}^{d} b_i x^i$ tq

$b_i \in \mathbb{Q}$ i $|a_i - b_i| \max\{|a|, |b|\}^i < \frac{\varepsilon}{3(d+1)} \Rightarrow \|p - q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Per tant, la triangular assegura que $\|p - f\|_\infty < \frac{2\varepsilon}{3}$.

Ara, sigui $n \in \mathbb{Z}^+$ tq $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \|(p + \frac{1}{n}\sin(mx)) - f\|_\infty < \varepsilon$.

Considerem la successió $\left(p + \frac{1}{n}\sin(mx)\right)_{m=1}^{\infty} =: (f_m)_{m \geq 1}$

Ja hem vist que aproxima f prou bé. Falta veure que

$$\lim_{m \to \infty} \ell\left(p + \frac{1}{n}\sin(mx)\right) = \infty$$

Ara fem servir la desigualtat triangular per veure que les oscil·lacions del sinus fan que $\ell(f_m) \to \infty$.

$$\ell\left(p + \frac{1}{n}\sin(mx)\right) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(p' + \frac{m}{n}\cos(mx)\right)^2}\,dx \geq \int_a^b \left|p' + \frac{m}{n}\cos(mx)\right| dx$$

$$\geq \frac{m}{n}\int_a^b |\cos(mx)|\,dx - \int_a^b |p'|\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_{ma}^{mb} |\cos u|\,du - \underbrace{\int_a^b |p'|\,dx}_{\text{ct.}} \geq \frac{2}{n}\left(\#\begin{array}{c}\text{Períodes}\\ \text{de } |\cos x|\end{array}\right) - \int_a^b |p'|\,dx$$

(ct.) $\quad \# \text{Períodes} = \left\lfloor \frac{m(b-a)}{\pi} \right\rfloor$

Com que l'interval $[ma, mb]$ té llargària $\to \infty$, el nombre de períodes de $|\cos u|$ que conté $\to \infty$.

En cada període $\int_{x_0}^{x_0+\pi} |\cos u|\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u = \sin u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$.

En conclusió, $\ell(f_m) \to \infty$.