Marató de problemes. Sempre, sempre parelles a la fme

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

Solució convencional:

Suposem que tenim n persones al pati, i que Cupid els dispara una fletxa per cada dues persones de manera que tenim un conjunt de punts al pla i totes les rectes que passen per com a minim dos d'aquests punts. A cada recta li direm relació. Si no estan tots alineats, vegem que com a minim hi ha una recta amb només dos punts. Procedirem per contradicció.

Sigui s el punt més proper a una recta r que no passa per ell. Això existeix perque tenim un nombre finit de rectes i punts. s és de sujetavelas, ja que és la persona més propera a una relació sense formar-hi part. Baixant láltura de s a r, per palomar a un dels costats tindrem dos punts (si un punt cau a láltura també ens val). Sigui n (de novio oficial) el més llunyà i t (de tio amb el que et vas liar a la hawaiana) el més proper. Com sabem,

Veritat universal 1. *La FME és un puterio*

Corol·lari que tot i estar en castellà volia escriure la ela geminada 2. *Entre s y n hay una relación. Sea esta l (lío que nadie sabe que pasó en los vestuarios tras las semis del Solà Morales)*

Peró per definició t és més estranyament més proper a l del que s és a r i per tant arribem a contradicció.

Però això és molt jove i avorrit, pel que us deixo la

Solució Virgolini[1]:

Estimats organitzadors,

Jo se que quan Fernando Simón sortia a parlar cada tarda, vosaltres tenieu preocupacions series com què collons passaria amb la selectivitat. Sèries, a part de lo important que és que la gent estava morint, però d'alguna manera farem l'esforç de ignorar-ho. El cas, des que l'Óscar Rivero va clavar totes les prediccions de quan parariem les classes (una altra cosa no, però el catastrofisme és la seva especialitat), i va fallar estrepitosament dient que tornariem despres de setmana santa, als que estavem a la uni va ser relativament chill.

Una puta merda, però bastant chill ja que cada profe feia el que podia i com diu me mare qui fa el que pot no està obligat a més. On en la vostra jerga: el carbassot fa el que pot. El cas, en mig de l'avorriment van apareixer els del 98 fent reviure la putissima Marató. Entre altres meravelles, van escriurem per privat quan vaig inventar-me un verb en el problema dels Javis, i van crear un putíssim gitlab que portem 5 edicions reaprofitant i on ESTAN ACCESSIBLES ELS PROBLEMES DELS ANYS ANTERIORS[2] PEDAZO DE SUBNORMALS.

Que tardeu la vida en corregir (ara ja heu millorat pero bueno), que els problemes estiguin redactats a ultima hora i això es noti en la il.legibilitat dels enunciats, pos ok. Que el Canales no publica res a l'hora perque no ho teniu enllestit, d'acord. Peò és que el primer dia no teniu impresos els problemes. Collons, que la tradició és que cada llista era d'un color i nosaltres vam imprimir en fulls de color diferents i els pdfs tenen fons de colors diferents.

El cas, que vosaltres no vau participar, però us podrieu haver llegit els problemes, i sobretot les solucions Francesco Virgolini. En particular, us deixo aqui una de les que per mi son de les millors solucions. Però el cas, que el problema 226 de la llista 2 deia:

[1] Curiosament, gens ràpida

[2] coma del vocatiu

Problema de la marató de fa 4 anys 1. *L'Amadeu s'ha vestit de cani, us treu la navalla i us exigeix de males maneres que proveu que, donada una col·lecció finita de punts al pla (R^2), o bé estan tots alineats, o bé existeix una recta que només en conté dos*

I ja vam donar aquesta solució:

Marató de problemes: Problema 226

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

No saps com has arribat fins aquí. El teu dia començava adormint-te i perdent el H6, però quan agafaves el següent hi veies a la Casanelles. No importava que arribessis tard perque la professora també ho feia. Però de sobte estaves just davant de la facultat de Física i Química (ecs!) i l'Amadeu t'amenaçava vestit de cani, perque just aquell dia no s'havia disfressat.

Amenaça 1. *Tu, brètol! Finits punts a $\mathbb{R}^2$. És vertitat que o bé tots estan alineats o almenys una recta en conté dos? Demostra'm-ho o et rajo per un nombr numerable de llocs.*

- Bé, de fet si assumim que els *navajazos* ocupen una superficie fixada, donat que el meu cos és compacte, amb finits *navajazos* ja em podries apunyalar sencer. Però el cas, Amadeu, no et posis nerviós només per suspendre un examen de química. En pots suspendre més al segon quadrimestre - dius mentre guanyes temps per pensar la demostració.

Amenaça 2. *Que m'ho demostris, tros d'ase. I si no es per contradicció et quedes sense móbil.*

- Bé, el que em demanes, assumint que m'has atracat dos cops a la Diagonal i que només has atracat finits cops, és que

Proposició 1. *Tots els atracaments han estat a la Diagonal o hi ha una recta que passa només per dos atracaments.*

Demostració. Si tots han estat a la Diagonal, obviament ja està. Suposem que no. I com aquesta navalla suïssa afilada em suggereix, raonarem per contradicció. Per simplicitat, anomenarem punts als llocs on has atracat i $\mathcal{A}$ al conjunt de punts on has atracat ($|\mathcal{A}| < \infty$) i suposarem que Barcelona és homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. El conjunt de rectes que uniexen dos punts de $\mathcal{A}$ l'anomenem $\mathcal{R}$. Suposem que tota recta de $\mathcal{R}$ conté al menys 3 punts de $\mathcal{A}$ i arribarem a contradicció.

Per ser $\mathcal{A}, \mathcal{R}$ de cardinal finit, sabem que existirà un punt tal que la distància d'aquell punt a qualsevol recta que no el conté és mínima. Sigui S aquell punt i r la recta a la qual la distància és mínima. Sigui $H \in r$ tal que $d(S, H) = d(S, r)$.

De sobte, et quedes en blanc. La por de l'Amadeu fent un recobriment del teu cos a navajazos t'envaiex. Però en lultim moment passa el Marc Herault amb una ecooltra a tota velocitat per la vorera, espantant un colom. Un colom!

Ara, com $r \in \mathcal{R}$, sabem que al menys tres punts de $\mathcal{A}$ en r. Pel principi del colomar, sabem que dos estaran al mateix costat. Sigui R_1 el més proper a H i R_2 el més llunyà. Sigui $s \in \mathcal{R}$ la recta que passa per R_2 i S. És evident que la $d(R_1, s) < d(S, r)$, portant a una contradicció i demostrant que sempre has atracat a la Diagonal o hi ha alguna recta on només has atracat dos cops. $\square$

- Però que dius, abraçafanals! Demostra'm al menys que la distància és més petita. Estic cansat de *exercicis pel lector* i *és evident* - diu amb to amenaçant l'Amadeu però sense ser una amenaça-. Treu el quadradet i demostra.

Bé, el segment que uneix R_1 amb s és paral·lel a l'alçada per H del triangle format per S, H, R_2, i és segur més petit, o igual si $H = R_2$. En qualsevol dels casos, l'alçada és estricament més petita que el segment $|SH| = d(S, r)$ per formar H, S i el peu de l'alçada un triangle rectangle. Per tant, ja ho he demostrat. Puc posar $\square$?

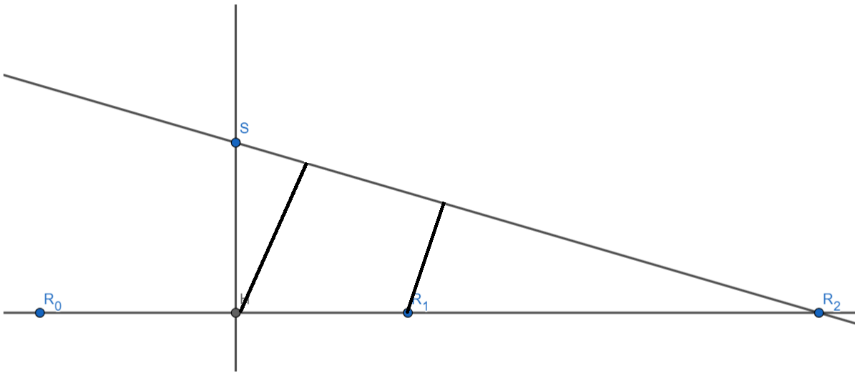

Figura 1: Esquema de l'esquema que tens a la mà

- No encara, vull veure abans un dibuix, pet de llufa!

Resignat, treus un boli de la motxil·la i et fas un dibuix cutre a la mà per tractar de que ho vegi del tot clar. A la Figura 1 se'n pot veure un esquema cutre.

-Bé, capcigrany, ara si pots posar el quadradet dels nassos.

□

Marxes tranquil, penses que ja res et pot molestar, quan de sobte sents que et torna a cridar

Amenaça 3. *Una última cosa, xuc de carbassa! I si el nombre de punts és numerable?*

- Trivial, estimat (bé, no masssa pero segueix tenint una navalla) Amadeu -li dius tranquil·litzat perque ja saps com respondre-. Quan hagis atracat numerables cops sí podras fer que cada recta tinui més de dos punts. Això ho pots fer per exemple si atraques a cada xamfrà de l'Eixample. O tornant a $\mathbb{R}^2$, si consideres $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^2$. Qualsevol recta tindrà un pendent racional i per tant contindrà infinits punts.

Ja tranquil, marxes cap a la classe de la Marta, que tot i que arribaràs tard saps que no importa perque, no cal enganyar-nos, no tindràs ni putissima idea de que es dual del quocient. O era al revés?