§1 10. Els Donatos del Roura.

Okey, aquest problema està bastant bastant guapo. Sigui E_n la esperança de donuts que s'emportarà en Roura si acudeixen n rouritos al entrenament. Calculant obtenim que

$$E_n = \frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\left(n - k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)\right].$$

El claim és que la fracció límit de Donatos que s'emportarà en Roura és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n} = 1 - \frac{\pi^2}{12} \approx 0.17753.$$

Començem manipulant E_n per expressar-lo com ens convingui.

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{n+1}\left[n + \sum_{k=1}^{n}\left(n - k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left(n + n^2 - \sum_{k=1}^{n} k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right) \\
&= n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \\
&= n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^+\\ rk\le n}} k \\
&= n - \frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^+\\ rk\le n}} k \\
&= n - \frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor^2 + \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor\right).
\end{aligned}$$

Ara ja estem més contents. Ara podem calcular $\frac{E_n}{n}$ per a $n \to \infty$. Recorda que $o(1)$ és una cosa que tendeix a zero quan $n \to \infty$. Ara

$$\frac{E_n}{n} = 1 - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor^2 + \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor\right).$$

Observa que ens podem petar els $\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor$ sense quadrat. Això és perquè

$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor \le \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{n}{r} = \frac{H_n}{n} = o(1),$$

on H_n és l'enèssim nombre harmonic, que és ben conegut que és $o(n)$. D'altra banda vull aproximar

$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor^2 \approx \frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}\left(\frac{n}{r}\right)^2.$$

Però ho puc fer, ja que la diferència entre tots dos sumatoris és $o(1)$. Això es veu fàcil manipulant:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{n}{r}\right)^2-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor^2&=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\left[\left(\frac{n}{r}\right)+\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor\right]\left[\left(\frac{n}{r}\right)-\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor\right]\\&\leq\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\frac{2n}{r}\cdot 1=\frac{2H_n}{n+1}=o(1).\end{aligned}$$

Per les dues observacions que acabo de fer, ja puc expressar

$$\frac{E_n}{n}=o(1)+1-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{r}\right)^2.$$

Ara ens queda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}=1-\frac{n}{2(n+1)}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{12},$$

on hem usat el facto conegut que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$