(4) La pinaga i la puga:

Per preservació d'arcconnectivitat (o de components arc connexes quan es treu el punt),

- La puga va a la puga
- Els punts d'intersecció van a ells mateixos, i, en concret, són punts fixes ja que han de preservar l'ordre relatiu entre ells (per continuïtat) i el (1,0) va al (1,0)
- Per l'anterior, els segments verticals han d'anar també a ells mateixos i els trossets horitzontals entre ells pues també.

Cas pues tancades: ~~la~~ ~~...~~ Tenim també que les puntes de les pues han d'anar a elles mateixes i pel que hem dit són punts fixos. Ara bé, la successió de puntes de pues en un espai tendeix a la puga mentres que en l'altre no. Per tant, f no pot ser contínua $\Rightarrow$ No existeix homeomorfisme.

Cas punes obertes: Sigui $\mathbb{P}$ ~~el~~ l'espai pinça-pinça amb la pinça moguda a $\frac{1}{2}$

Ens considerem el següent tancat:

$$T = \{0, \tfrac{1}{2}\} \cup \bigcup_{n \geq 3} \{\tfrac{1}{n}, [\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n}]\}$$

$$= \mathbb{P} \cap \{(x, y) : 0 \leq x \leq \tfrac{1}{3}, -x + \tfrac{1}{2} \leq y \leq x + \tfrac{1}{2}\}$$

T:

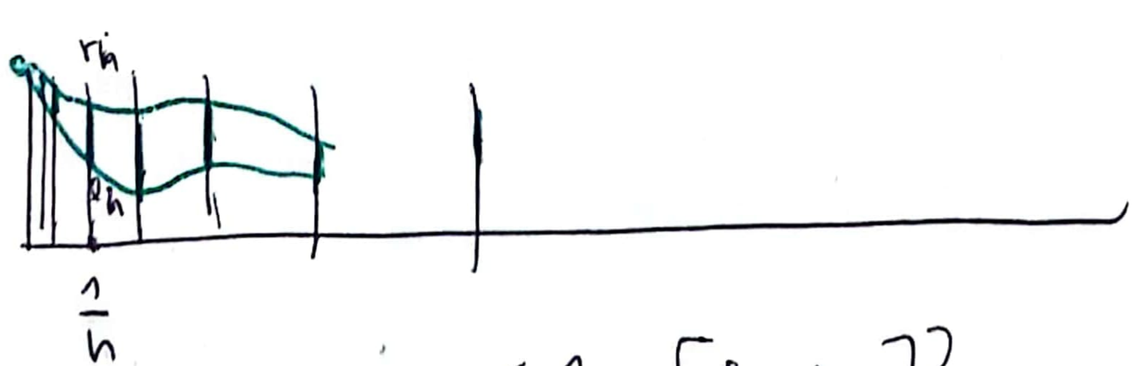
La imatge de T ha de ser un tancat en $f(\mathbb{P})$ que compleix

$$f(T) = f(\{0, \tfrac{1}{2}\}) \cup \bigcup_{n \geq 3} f(\{\tfrac{1}{n}, [\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n}]\})$$

Va a la pinça $\{0, 1\}$

La imatge d'un tros de segment n-èssim ha d'anar a un tros de segment n-èssim

$f(T)$:



$$f(T) = \{0, 1\} \cup \bigcup_{n \geq 3} \{\tfrac{1}{n}, [l_n, r_n]\}$$

Per preservació de connectivitat amb la puça (ha d'haver-hi punts arbitràriament aprop de la puça en $f(T)$ també), tenim que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 1.$$

Considerem un l'obert de $\mathbb{R}^2$

$$U = \left(0, \frac{1}{100}\right) \times \left(\frac{3}{4}, 1\right):$$

$$U_p = U \cap \mathbb{R} = \bigcup_{n>100} \left\{ \frac{1}{n}, \left(\frac{3}{4}, 1\right) \right\}$$

$$f(U_p) = \bigcup_{n>100} f\left(\left\{ \frac{1}{n}, \left(\frac{3}{4}, 1\right) \right\} \right)$$

Per la continuïtat de f, $f\left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{3}{4}\right\}\right)$ ha d'anar a un punt més amunt de r_n i per Squeeze theorem $\lim_{n\to\infty} f\left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{3}{4}\right\}\right) = \{0, 1\}$ = la puça

Ara bé, $\lim \left\{\frac{1}{n}, \frac{3}{4}\right\} = \left\{0, \frac{3}{4}\right\} \neq$ la puça

CONTRADICCIÓ