§1 364. Graf i àlgebra lineal.

Sigui p el nombre primer que limita la calentitud[1]. Sigui G el graf de qui va calent per qui. L'enunciat no diu que la relació sigui simètrica, així que G pot ser dirigit (en veritat la solució és exactament la mateixa). Llavors quan el vértex v es masturba augmenta en 1 la calentitud d'ell mateix i de tots u amb un edge $v \to u$. Numera els vértexs del graf $1, 2, 3, \ldots, n$. Considera una matriu $n \times n$ A definida amb $a_{ii} = 1$ per tota $i \in [n]$ i posant un 1 a a_{ij} si i només si $i \to j$ està entre les arestes. Tota la resta de la matriu són zeros. El claim és que sempre podem recuperar quines masturbacions s'han fet si i només si el determinant de A no és múltiple de p. Bueno, doncs cal fer dues direccions.

Determinant no zero mod $p \implies$ puc recuperar. La observació important (i la raó de ser de la matriu A) és que recuperar les masturbacions realitzades és equivalent a resoldre un sistema d'equacions amb matriu de coeficients A en $\mathbb{F}_p$. Això es veu a simple vista: si $b \in \mathbb{F}_p^n$ ens marca com han variat les calentituds, llavors llavors el que volem es resoldre el sistema $Ax = b$, i x ens marcarà el nombre de cops que s'ha masturbat cada vértex.

Si el determinant de A és no-zero, llavors A té rang n en $\mathbb{F}_p$, implicant que el sistema sempre és compatible determinat. Per tant, com se'ns diu que el conjunt de masturbacions és minimal, la resposta seràn els coeficients de x traslladats a $\mathbb{F}_p$ a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.

Puc recuperar $\implies$ determinant no zero mod p. Això és más de lo mismo. Suposa que el determinant no és zero mod p. Llavors el sistema homogeni $Ax = 0$ (on 0 és el vector full zeros de $\mathbb{F}_p^n$) té solucions $x \neq 0$. En particular, si tenim un sistema compatible qualsevol $Ax = b$ amb $b \neq 0$, l'espai vectorial de solucions tindrà dimensió almenys 2, i el problema peta. Si tot això et sembla obvi i ja és un 7, no cal que llegeixis el q segueix (que és una mica pal).

Posats a formalitzar-ho bé, fem el següent. Sigui $k \neq 0$ tal que $Ak = 0$. Sigui x un vector amb tot 0 menys un 1, de manera que a la coordenada on x té el 1 k pren un valor $a \neq 0$. Considera els vectors x i $x + a^{-1}k$. Aquests dos vectors són tots dos solucions d'un mateix sistema matricial $At = b$ on $b = Ax = A(x + a^{-1}k)$. No obstant, x i $x + a^{-1}k$ no són un "subset" de l'altre, en el sentit que hi ha caselles on x té zeros i $x + a^{-1}k$ no i vice-versa. Per tant, si b és el vector de canvi en la calentitud, llavors és impossible recuperar el vector de qui s'ha masturbat.

Oh shit acabo d'escriure el títol del problema i acabo de caure que es diu "Graf i àlgebra lineal", top spoilers més obvis dels que no me n'adono fins que ja no serveix de res.

[1] yeah segur q això és una paraula i existeix