P91. Approximate, aproxima!

Cauchy-Schwarz

Primer sigui $\mu = 2$, $x \notin \mathbb{Q}$. Per un $n \in \mathbb{Z}^+$ qualsevol podem fer Palomar amb $[0,1)$ separat en $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ per $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ on posem $\{ix\}$ (part decimal) per $i \in \{0,\dots,n\}$.

Aleshores $\exists i,j \in \{0,1,\dots,n\}$ tq $\{(i-j)x\} < \frac{1}{n}$, $i>j$.

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } |(i-j)x - p| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } \left|x - \frac{p}{i-j}\right| < \frac{1}{n(i-j)} \leq \frac{1}{(i-j)^2}$$

Com que n era arbitrari, podem fer infinits $\frac{p}{q}$ amb error $< \frac{1}{q^2}$.

Per tant per quasi tot x, $\mu_x \geq 2$ (el seu perfil racional).

Sigui ara $\mu > 2$ i definim $A_q^\mu \equiv \{x \in [0,1]$ tq $\exists p \in \mathbb{Z}^+$ tq $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu}\}$, $(p,q)=1$.

Els números (de $[0,1]$) amb perfil racional $\geq \mu$ són $A^\mu \equiv \limsup_q A_q^\mu$.

I els que tenen perfil racional exactament μ serien $A^\mu \setminus \bigcup_{n\geq 1} A^{\mu + 1/n}$.

Ara, és clar que $\lambda(A_q^\mu) \leq q \cdot \frac{2}{q^\mu} = \frac{2}{q^{\mu-1}}$ (on $\lambda \equiv$ mesura de Lebesgue).

Per tant $\sum_{q\geq 1} \lambda(A_q^\mu) < +\infty$ (ja que $\mu - 1 > 1$)

i tenim per Borel-Cantelli que $\lambda(A^\mu) = 0 \quad \forall \mu > 2$

$$\Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} A^{2+1/n}\right) = 0 \quad \text{i} \quad \lambda(A^2) = 1$$

$$\Rightarrow \lambda\left(A^2 \setminus \bigcup_{n\geq 1} A^{2+1/n}\right) = 1 \Rightarrow \lambda(\{x \in [0,1] \text{ tq } \mu_x \neq 2\}) = 0$$

El mateix que passa en $[0,1]$ passa en la resta d'intervals $[n, n+1] \Rightarrow \lambda(\{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \mu_x \neq 2\}) = 0$.

... Per racionals $x = \frac{a}{b}$ i $q > b$, $\left|x - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{z \in \mathbb{Z}}{\mathrm{mcm}(b,q)}\right| \geq \frac{1}{q}$, $= \frac{1}{q}$ si $b|q$ i $p = bq-1$

Així que $\forall \mu < 1$ $\exists$ infinits $\frac{p}{q}$ amb error $< \frac{1}{q^\mu}$, i amb $\mu = 1$ només finit

$\Rightarrow$ Els racionals tenen perfil racional 1.

A més, el nombre de Liouville $L=\sum_{n\geq 0} 2^{-n!}$ es pot aproximar per $\sum_{n=0}^{m} 2^{-n!}$ amb error $\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n!} < 2^{-(m+1)!}\sum_{k\geq 0} 2^{-k}$.

Per tant l'error és $E_m < 2^{-(m+1)!+1} < 2^{-m!\mu}$ si $m \geq \mu$.

Així que el perreo racional de L és $\geq \mu$ $\forall \mu \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ És $+\infty$.

En resum, tenim:

- Els racionals tenen perreo racional 1.
- Quasi tots els nombres tenen p.r. 2 (perreo racional 2).
- $L=\sum_{n\geq 0} 2^{-n!}$ té p.r. $+\infty$

Faltam x_b per $b \in \mathbb{Z}^+_{\geq 3}$.

91. Aproximate, aproxima! Pepperoni

Em tiraré un freestyle amb continued fractions així que ja estàs obrint la wikipedia.

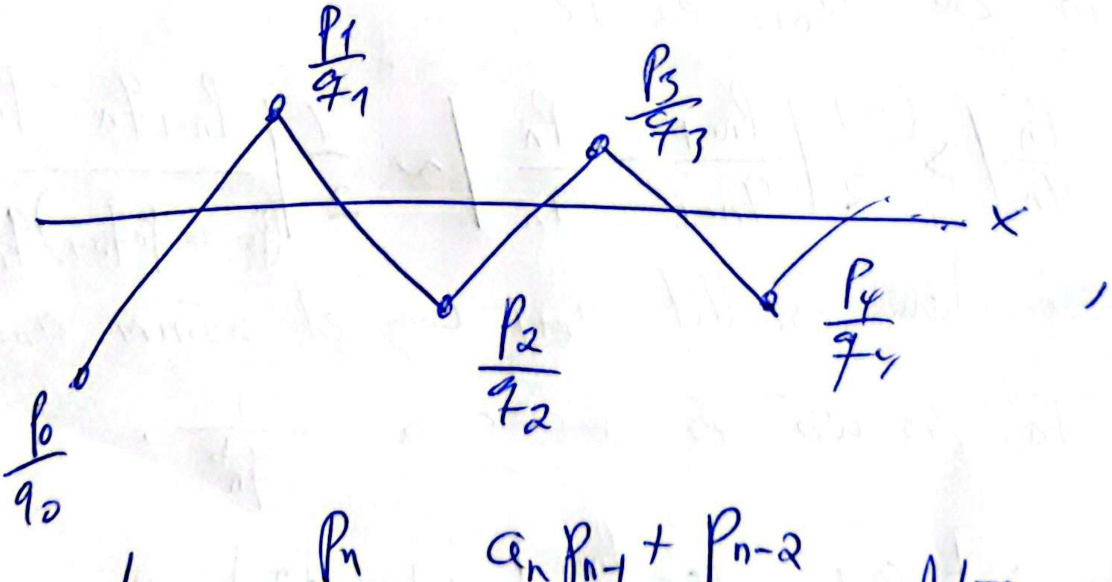
$x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ té fracció continua única associada, i.e., $\exists!\, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{Z}^+$ t.q.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}.$$

Ara definim l'n-èssim familiar de x com

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}} =: \frac{p_n}{q_n}$$

Nota que clarament $\frac{p_0}{q_0} < x$, $\frac{p_1}{q_1} > x$, $\frac{p_2}{q_2} < x, \ldots$

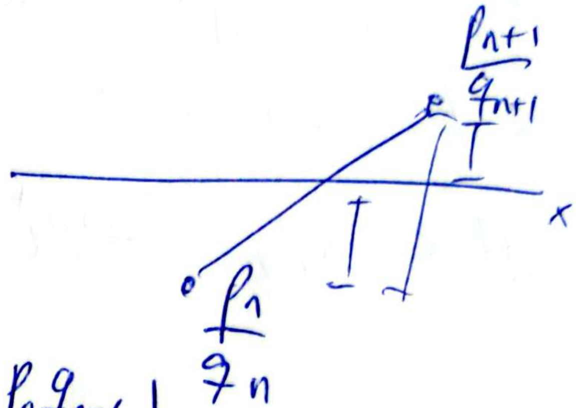


i claramet $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$. Also, per casi definició de continued fraction tenim que

$$\left|x-\frac{p_m}{q_m}\right| < \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \quad \text{si } m>1.$$

Ara, és així que

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|$$



$$= \left|\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{a_{n+1}q_n^2+q_{n-1}q_n}\right|.$$

Com a_{n+1} és independent de $p_{n-1}, p_n, q_{n-1}, q_n$, $\exists a_{n+1}$ mínim t.q. això és $< \frac{1}{q_n^b}$. Per tant ja tenim que el pereo racional de x és $\geq b$. Veurem que és exactament b. Agafa $b'>b$. Ara, per definició de a_{n+1} es té:

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \overset{(*)}{>} \frac{1}{2}\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| \sim \frac{1}{2}\left|\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{(p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1})q_n^b+O(q_n^2)}\right|.$$

ja que hem escollit a_{n+1} com el mínim $a_{n+1}\in\mathbb{Z}^+$ t.q. la fracció és menor a $\frac{1}{q_n^b}$.

(*) s'ha usat que $\left|x-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|$. $\times$.

Per tant, com $q_n \to \infty$, per n suficientment gran tenim que $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\,b}}$, però $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n^{\,b'}}$ per $b' > b$. Això ~~acaba el pro~~ no acaba el problema, ja que queda veure que si $\frac{a}{d}$ no és un n-èssim familiar, llavors $\left|x - \frac{a}{d}\right| > \frac{1}{d^{b'}}$. Però això és conseqüència de:

Thm (Legendre's thm on continued fractions)

Donat $\alpha \in \mathbb{R}$, i $p, q \in \mathbb{N}$ t.q. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, llavors $\frac{p}{q}$ ha de ser un n-èssim familiar de α.

Per tant, ja tenim que $\forall b \in \mathbb{Z}^+_{\geq 2} \cup \{+\infty\}$ $\exists x_b$ amb pureo racional b.

⚠ Atenció, el cas $b = +\infty$ també el tenim, ja que escollim a_{n+1} t.q.

$$\left|\frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{a_{n+1} q_n^2 + q_{n-1} q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\,n}} \quad \forall n, \text{ we win.}$$

Ara per a veure que casi tot $x \in \mathbb{R}$ té perco racional 2, gràcies al thm anterior només fa falta mirar-nos els n-èssims familiars.

De fet, si recordem la construcció dels x_b's, veiem clarament que si els a_{n+1} són acotats, ~~o si~~ ~~$a_{n+1} = o(q_n)$~~ llavors el nombre té perco racional 2.

Són les $x \in \mathbb{R}$ amb a_n's acotats en la fracció contínua casi tots els nombres? Idk.

El que sí podem dir és que escollir $a_1, a_2, a_3, \dots$ acotat és almenys tan gran com $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que és no numerable, però això no ens diu que "quasi tots" els nombres siguin d'aquesta forma.