-340

Sigui $p(n)$ el nombre de subconjunts A de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tals que hi ha una única K amb $\{K, K+1\} \subseteq A$.

Sigui $s(n)$ el nombre de subconjunts B de $\{1, 2, \dots, n\}$ tals que no hi ha cap K amb $\{K, K+1\} \subseteq B$.

Volem calcular $p(n)$.

Fixem un conjunt A comptat per $p(n)$.

Poden passar 3 coses:

$\longrightarrow$ $\{n-1, n\} \subseteq A$. Llavors, $n-2 \notin A$ i

$A \cap \{1, 2, \dots, n-3\}$ és comptat per $s(n-3)$

$\longrightarrow$ $n \in A$, $n-1 \notin A$. Llavors

$A \cap \{1, 2, \dots, n-2\}$ és comptat per $p(n-2)$

→ ~~B~~ $n \notin A$. Llavors

$A \cap \{1, 2, \ldots, n-1\}$ és comptat per $p(n-1)$

Al revés també funciona. Donat un subconjunt comptat per les expressions anteriors, el podem ampliar de manera ~~...~~ indicada per a obtenir un conjunt A comptat per $p(n)$.

Això ens diu que

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) + s(n-3) \qquad \forall n \geq 3$$

Similarment, separant els casos $n \in B$ ($\Rightarrow n-1 \notin B$) i $n \notin B$, obtenim

$$s(n) = s(n-1) + s(n-2) \qquad \forall n \geq 2$$

Fent els casos base, tenim

$$s(0) = 1 \qquad (\emptyset)$$
$$s(1) = 2 \qquad (\emptyset, \{1\}),$$

així que concloem $s(n) = F_{n+1}$, l'$n+1$-èsim nombre de Fibonacci.

Ara estem en condicions de trobar $p(n)$.

Comencem amb els casos base:

$$P(0)=0 \qquad P(1)=0 \qquad P(2)=1 \qquad (\{1,2\})$$

$$P(3) = 1+0+1 = 2$$

Ara:

$$-\quad P(n) = -P(n-1) - P(n-2) - S(n-3)$$

$$-\quad P(n+1) = -P(n) - P(n-1) - S(n-2)$$

$$P(n+2) = P(n+1) + P(n) + S(n-1)$$

$$\begin{aligned} P(n+2) - P(n+1) - P(n) = {} & P(n+1) - \cancel{P(n)} - P(n-1) \\ & + \cancel{P(n)} - P(n-1) - P(n-2) \\ & \underbrace{+ S(n-1) - S(n-2) - S(n-3)}_{\to 0} \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 3$$

Hem de resoldre la recurrència

$$P(n+2) - 2P(n+1) - P(n) \overset{+2P(n-1)}{} + P(n-2) = 0,$$

que té polinomi característic $t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t + 1 =$

$$= (t^2 - t - 1)^2$$

Així, $P(n)$ té la forma $A\varphi^n + Bn\varphi^n +$
$+ C\bar{\varphi}^n + Dn\bar{\varphi}^n$

per a certs coeficients A, B, C, D.

Sabem:

$$P(0) = 0 = A + C \rightarrow C = -A$$

$$P(1) = 0 = A\underbrace{(\varphi - \bar{\varphi})}_{\sqrt{5}} + B\varphi + D\bar{\varphi}$$

$$P(2) = 1 = A\underbrace{(\varphi^2 - \bar{\varphi}^2)}_{\sqrt{5}} + 2B\varphi^2 + 2D\bar{\varphi}^2$$

$$\Downarrow$$

$$P(2) - P(1) = 1 = B\underbrace{(2\varphi^2 - \varphi)}_{\varphi+2} + D\underbrace{(2\bar{\varphi}^2 - \bar{\varphi})}_{\bar{\varphi}+2}$$

$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$

$$P(3) = 2 = A\underbrace{(\varphi^3 - \bar{\varphi}^3)}_{2\sqrt{5}} + 3B\varphi^3 + 3D\bar{\varphi}^3$$

$$2 = P(3) - 2P(1) = B\underbrace{(3\varphi^3 - 2\varphi)}_{4\varphi + 3} + D\underbrace{(3\bar{\varphi}^3 - 2\bar{\varphi})}_{4\bar{\varphi} + 3}$$

De $\quad B(\varphi+2) + D(\bar{\varphi}+2) = 1$

i $\quad B(4\varphi+3) + D(4\bar{\varphi}+3) = 2$

Aquest sistema és clarament compatible determinat, i veiem ~~...~~ que $B = D = \frac{1}{5}$ n'és una solució.

Tornant a $p(1) = 0$, veiem $A = -\frac{1}{5\sqrt{5}}$, que implica $C = \frac{1}{5\sqrt{5}}$. Per tant, la fórmula tancada per a $p(n)$ és

$$-\frac{1}{5\sqrt{5}}\varphi^n + \frac{1}{5}n\varphi^n + \frac{1}{5\sqrt{5}}\bar{\varphi}^n + \frac{1}{5}n\bar{\varphi}^n =$$

$$= \frac{1}{5}\left(nL_n - F_n\right)$$