

XXIX Marató de Problemes

Mesozoic

Problema 1380

El Gabri no té ni puta idea de fer integrals. Però no passa res, perquè aquí està el mormosaurio (amb cap relació amb la integration bee) per donar-li una classe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin^{2024} x}{\sin^{2024} x + \cos^{2024} x} dx = - \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} (-dt) = \\ &= -I + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} dt \quad \Rightarrow \quad 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} dt = \pi J \end{aligned}$$

on hem fet el canvi $t = \pi - x$

Ara calculem J :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \frac{\sin^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin^{2024} x}{\sin^{2024} x + \cos^{2024} t} dx = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} (-dt) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2024} t}{\cos^{2024} t + \sin^{2024} t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t}{\sin^{2024} t + \cos^{2024} t} dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

on hem fet el canvi $x = \frac{\pi}{2} - t$ a la segona integral.

Per tant, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

El tradesaurio ha criticat al mormosaurio perquè la seva solució no era elegant. No obstant, tothom sap a que es dedica el tradesaurio, i que moure numeritos en una pantalleta no és precisament el que es podria dir elegant.