

Assignatura:

Two Men $OT\&H\epsilon\tau\alpha$

Estudiant/a:

Data:

1777

En lloc de considerar les butes ~~que~~ ^{con} caient a $1, 2, 3, \dots, n$, les considerarem caigudes a $0, 1, 2, \dots, n-1$ (ho podem fer amb una simple rotació), i per no escriure $n-1$, en direm N .

Considera l'interval més petit. Això és entre la botifarra a la posició K i la que cau a l .

Notem que trobem el mateix interval entre les botifarres

$|l - K|$ i 0 , via una rotació que envii $\min\{K, l\}$ a 0 . Notem $K \neq l$ per a $N > 0$.

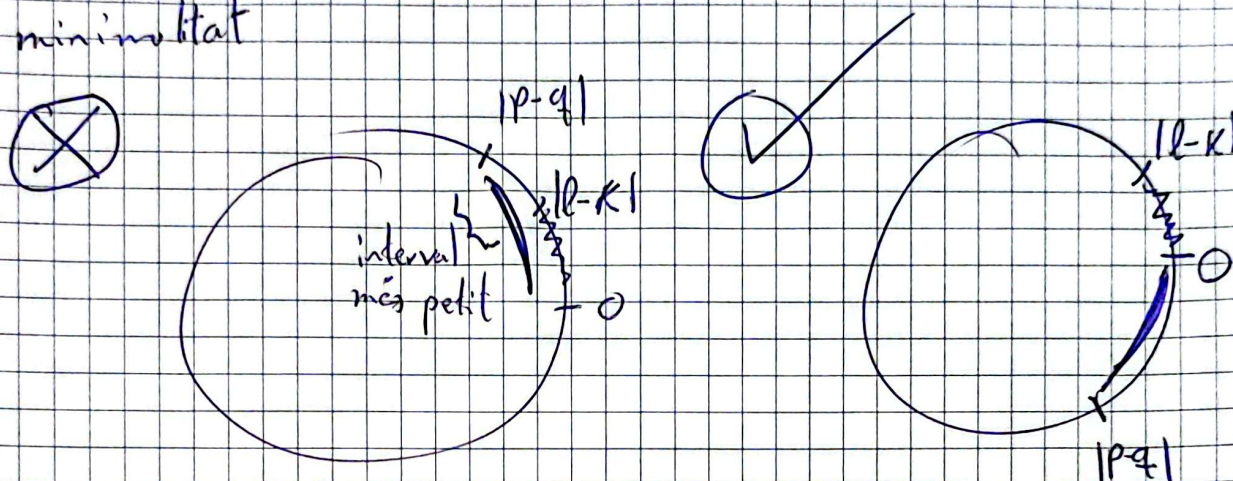
Considera ara ~~el~~ l'interval més petit que no sigui múltiple del primer. Aquest existeix perquè altrament el perímetre π pertanyeria a $\mathbb{Q}$: (la longitud d'aquest ^{primer} interval és $|l - K| + a\pi$ i un múltiple d'això seria el perímetre π : $b(|l - K| + a\pi) = \pi \Rightarrow \pi \in \mathbb{Q}$, i sabem que no és el cas. Ve retruc, $a_n \geq 2 \quad \forall N \geq 1$.

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Així, l'interval més petit que no és múltiple del primer, posem que és entre les butis p i q , de la mateixa manera que abans, el trobem entre $|p-q|$ i 0 , però l'interval és en la direcció contrària, ja que, si no, contradirien la minimalitat



Anomenarem a les longituds d'aquests intervals x, y , amb $x \leq y$

Ara demostrarem que tot interval té longitud x, y o $x+y$.

El cas base amb $N=1$ és trivial

~~Inductiu~~

Suposem -ho cert per a N i considerem on cau la buti $N+1$.

Si cau en un interval (a, b) amb $a \neq 0$, $b \neq 0$, veiem que els intervals (a, b) , $(a-1, N)$ i $(N, b-1)$ tenen longituds diferents, així que corresponen a x, y i $x+y$ en algun ordre (x, x, y no és possible perquè y no és múltiple de x) i $N+1$ separa (a, b) en intervals de longitud x i y , així que aquestes continuen sent

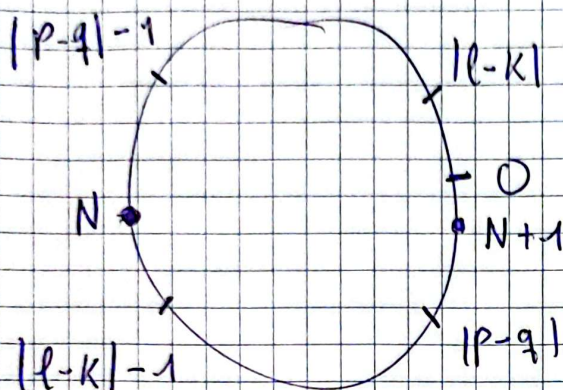
Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

les ~~longituds~~ longituds dels intervals en el pas $N+1$.

En canvi, si $N+1$ cau en un interval involucrant el O ,
tenim el següent:



N parteix l'interval entre
 $|P-Q|-1$ i $|l-K|-1$ en
dos trossos, així que les
longituds haurien de ser
 $X+Y$ en X i Y

(Notis que aquest argument és vàlid inclús quan $|P-Q|$ o $|K-l|=1$)

Per tant $N+1$ fa el mateix, i com que no coincideix amb O
(ja que π no és ~~racional~~ racional), divideix Y en X i $Y-X$.

Ara tenim que els valors de X i Y han de canviar-se, en
algun ordre per X i $Y-X$. Per a completar la inducció, cal
veure que no queda cap segment de longitud $X+Y$.

Si en quedés algun, posem entre a i b , aleshores tindriem
que $a \neq 0$ i $b \neq 0$, ja que el O no està involucrat en un interval
tant gran. Així, podem considerar l'interval entre $a-1$ i $b-1$
i mirar si aquest també té longitud $X+Y$, i repetir el procés
fins que aquest no sigui el cas.

És a dir, no està fragmentat

Assignatura _____

Estudiant/a _____

Data _____

Per tant, cal veure que no hi ha cap interval (a, b) de longitud $x+y$ tal que $(a-1, b-1)$ estigui fragmentat.

Sigui c una buti caient a $(a-1, b-1)$. Llavors, $c+1$ cau a (a, b) , així que $c+1$ no existeix, o és únic millor dit $c+1 = N+1$ i $c = N+1$. Això és impossible perquè $N+1$ està tallant un interval de longitud y en un de $y-x$ i un de x , així que no pot ser l'únic punt fragmentant l'interval $(a-1, b-1)$.

Concloem doncs que els únics segments que hi ha tenen longituds x, y i $y-x$, així que completem la inducció: tenim $a_n \leq 3 \quad \forall n$.

Notem que, just abans d'introduir aquest $N+1$ tenim $\otimes$ mentre que just després tenim $\otimes \otimes$

En la primera situació $\otimes$, tenim només intervals de longitud x i y , ja que hem vist que no n'hi ha cap amb $x+y$. A la segona, $\otimes \otimes$

n'hi ha almenys un de longitud x , un de longitud $y-x$, i un de longitud y sempre i quan no sigui aquest el mateix que l' $N+1$ parteix. Això no passa quan $|l-K| \neq 1$, entre N i $|l-K|+1$.

Assignatura

Estudiant/a

Data

Així, si tirem prou endavant per a forçar $|l-k| > 1$

(la longitud dels intervals tendeix a 0 perquè $\mathbb{Z}$ és dens

a $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ ja que $\langle 1, \pi \rangle$ ho és a $\mathbb{R}$),

trobem almenys 3 intervals de longitud diferent sempre
que fem el canvi de longituds mínimes $\{x, y\} \rightarrow \{x, y-x\}$

~~Nota~~ Només cal veure doncs que això passa infinites
vegades, trobant en conseqüència que $a_n = 2$ i $a_n = 3$
infinites vegades i forçant $\liminf a_n = 2$ i $\limsup a_n = 3$,

però això és conseqüència directa del fet que $\mathbb{Z}$ és dens

a $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, així que la longitud màxima dels intervals
tendeix a 0, així que les mínimes han d'anar canviant.