P- 1781 - KLEEMINTERS

$n \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ on $b \geq n$. Volem estudiar com és $B_n = \bigcup_{b \geq n} B(\frac{a}{b}, \frac{1}{b^2})$ $b \geq n$

$B_1 = \bigcup_{\forall b \geq 1} B_i(\frac{a}{b}, \frac{1}{b^2}) \Rightarrow \frac{a}{b}$ amb $b \geq 1$ són tots els #racionals $\Rightarrow$ com els racionals són densos en els $\mathbb{R}$ $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow h \in B_i(\frac{a}{b}, \frac{1}{b^2}) \Rightarrow B_1 = \mathbb{R}$.

Ara fixem-nos amb el terme $B_n = \bigcup_{i \in I} B_i(\frac{a}{b}, \frac{1}{b^2})$ on $b \geq n$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (α irracional) $\Rightarrow$ Sabem pel teorema de Dirichlet que $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$ ho satisfan infinites parelles. Això funciona per palomar ja que ens centrem en la part ~~decimal~~ fraccionària de α i veiem que tenim $N+1$ nombres en N intervals. $\Longrightarrow |q\alpha - p| < \frac{1}{N}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

α irracional

$\Longrightarrow |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. Per tant, per definició de Bola

$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2} \Rightarrow \alpha \in B(\frac{a}{b}, \frac{1}{b^2})$ $\forall b \geq n$ (hi ha infinites parelles.)

<u>Ara veiem que per a $\alpha \in \mathbb{Q}$ $\alpha \notin B_n$:</u>

Per R.A $\frac{p}{q} \in B_n$ $\forall n \geq q \Longrightarrow \left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{bp - aq}{bq}\right| \overset{*}{\geq} \frac{1}{bq} \geq \frac{1}{b^2}$

ja que $b \geq n > q$.

$\boxed{bp - aq \geq 1 \ *}$ $bp - aq = 0 \Rightarrow bp = aq$ $b > q$ $\gcd(a,b) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b | aq \Longrightarrow b | q$ $b > q$!!! <u>Contradicció</u>. Per tant, en la intersecció només trobarem als irracionals. $\boxed{\bigcap_{n \geq 1} B_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$