

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Two Men OT & H & z Tα

1789

No tem que
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$= \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\dots = \sum_{i=0}^j \binom{n-i}{k-i} \binom{j}{i}$$

$$A_{i < k}, \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \binom{n-i}{k-i} \binom{j}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{j} \binom{n-i}{k-i} \frac{1}{2^n}$$

Puc escollir j tins
i després $k-i$ dels
restants, o primer
triar-los tots i
després triar
els primers
seleccionats

$$= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{j+k-i} \binom{j+k-i}{j} \frac{1}{2^n} =$$

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

$$= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \binom{j+k-i}{j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{j+k-i} \frac{1}{2^n}.$$

Farem un parèntesi, per a demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} \frac{1}{2^n} = 2 \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Per a $x=0$, la suma és $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$.

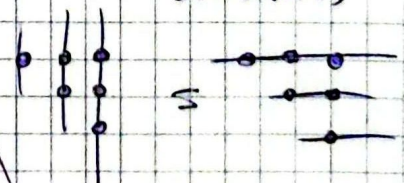
Per a $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^n \binom{n-l}{x-1} \right) \frac{1}{2^n} \leq$$

Pal de
hockey

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{n=l}^{\infty} \binom{n-l}{x-1} \frac{1}{2^{n-l}} \right) \frac{1}{2^l} =$$

Inter canviar
sumatori's



(tots els termes
són positius 00,
així que es pot
fer)

Assignatura

Estudiant/a

Data

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{HI} \end{matrix} \sum_{l=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^l} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

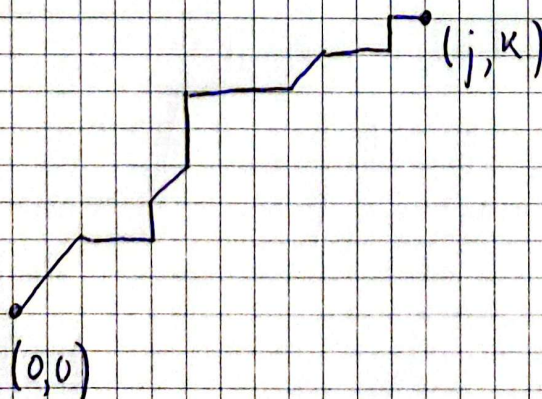
Dit això, la suma demanada és (i la deixem més simètrica)

$$\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \binom{j+k-i}{j} \cdot 2 =$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{\min(j,k)} \binom{j+k-i}{i, j-i, k-i}$$

(oble del

Així es pot reinterpretar com el nombre de camins de $(0,0)$ a (j,k) amb els moviments $(1,0)$, $(0,1)$ i $(1,1)$.



Fem i passos diagonals,
 $j-i$ horitzontals i
 $k-i$ verticals

Assignatura

Estudiant/a

Data

No tenim fórmula tancada, tret del fet que
la funció generatriu del nombre de camins és trivialment

$$T(x, y) = xT(x, y) + yT(x, y) + xyT(x, y) + 1,$$

així que $T(x, y) = \frac{1}{1-x-y-xy} :$

per tant la suma demanada és

$$2 \sum_{j+k} \frac{d^{j+k}}{dx^j dy^k} \frac{1}{1-x-y-xy} \Big|_{(0,0)}$$