

P1811 Asumimos que la distribución aleatoria uniforme del valor de \$Libra es discreta (si fuese ~~continua~~ ^{continua}, la respuesta variaría ligeramente, pero podríamos seguir con razonamientos similares). Asumimos también que lo que pregunta el enunciado es el valor esperado de la estimación de Bernat el día 2025.

A la estimación de Bernat el día n (con $n \in \{2021, \dots, 2025\}$) la llamamos X_n . Por lo que dice el enunciado, llamamos Y_n al valor de la variable \$Libra el día n . Por lo que dice el enunciado:

$$p(X_{n+1}=k) = p(X_n=k-1)p(Y_{n+1} \geq k) + p(X_n=k)p(Y_{n+1}=k) + p(X_n=k+1)p(Y_{n+1} \leq k) = \\ = \frac{2026-k}{2025} p(X_n=k-1) + \frac{1}{2025} p(X_n=k) + \frac{k}{2025} p(X_n=k+1) \quad \forall k \in \{2021, \dots, 2025\}$$

Así que, con valores esperados:

$$\underline{E(X_{n+1})} = \sum_{k=1}^{2025} (k p(X_{n+1}=k)) = \\ = \sum_{k=1}^{2025} \left(\left[\frac{2026-k}{2025} p(X_n=k-1) + \frac{1}{2025} p(X_n=k) + \frac{k}{2025} p(X_n=k+1) \right] k \right) = \\ = \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{k(2026-k)}{2025} p(X_n=k-1) \right) + \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{k}{2025} p(X_n=k) \right) + \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{k^2}{2025} p(X_n=k+1) \right) = \\ \stackrel{\substack{\text{cambio} \\ p(X_n=k) \text{ si} \\ k \in \{2021, \dots, 2026\}}}}{=} \sum_{k=2}^{2026} \left(\frac{k(2026-k)}{2025} p(X_n=k-1) \right) + \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{k}{2025} p(X_n=k) \right) + \sum_{k=0}^{2024} \left(\frac{k^2}{2025} p(X_n=k+1) \right) = \\ = \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{(k+1)(2025-k)}{2025} p(X_n=k) \right) + \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{k}{2025} p(X_n=k) \right) + \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{(k-1)^2}{2025} p(X_n=k) \right) = \\ = \sum_{k=1}^{2025} \left(\frac{2023k + 2026}{2025} \right) p(X_n=k) = \frac{2023}{2025} \sum_{k=1}^{2025} (k p(X_n=k)) + \frac{2026}{2025} \sum_{k=1}^{2025} p(X_n=k) =$$

$$= \frac{2023}{2025} E(X_n) + \frac{2026}{2025}$$

Por lo que:

$$E(X_{n+1}) = \frac{2023}{2025} E(X_n) + \frac{2026}{2025}$$

$$\Rightarrow E(X_{n+1}) - 1013 = \frac{2023}{2025} (E(X_n) - 1013)$$

Además, sabemos que $E(X_0) - 1013 = 1 - 1013 = -1012$. Por tanto, probamos por inducción que $E(X_n) - 1013 = -1012 \cdot \left(\frac{2023}{2025}\right)^n \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, 2025\}$.

* Caso base: Ya hemos probado que para $n=0$, $E(X_0) - 1013 = -1012 = -1012 \cdot \left(\frac{2023}{2025}\right)^0$.

* Caso inductivo: Si lo asumimos cierto para n , entonces

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) - 1013 &= \frac{2023}{2025} (E(X_n) - 1013) = \frac{2023}{2025} \cdot (-1012 \cdot \left(\frac{2023}{2025}\right)^n) = \\ &= -1012 \cdot \left(\frac{2023}{2025}\right)^{n+1}, \text{ lo que concluye la } \\ &\text{prueba por inducción.} \end{aligned}$$

Así que, tras 2025 días, el valor esperado de la producción de Bernat es:

$$\underline{\underline{E(X_{2025}) = 1013 - 1012 \cdot \left(\frac{2023}{2025}\right)^{2025} \approx 1013 - 1012 e^{-2} \approx 876}}$$