

Problema 1815: Feu com la Bet

🐾🐾 gossos d'esquadra 🐾🐾



¡Woof! Soy Zuma otra vez. ¡Qué graciosa es Bet que hace dos carreras y no pisa la uni por ninguna! A mí ya no me dejan estudiar en la universidad. No desde El Accidente...

...

...

Consideraremos dos casos: que $a(x)$ sea constante o que no lo sea.

Primero, supongamos que existe una solución con $a(x)$ constante. Entonces, $a(x) = a(0)$ y

$$f(x) + g(y) = a(0)b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Evaluando en $y = 0$:

$$f(x) + g(0) = a(0)b(0) \implies f(x) = a(0)b(0) - g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, en este caso, $f(x)$ ha de ser una función constante también, $f(x) = f(0)$. Además:

$$g(y) = a(0)b(y) - f(0) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Por lo que $g(x)$ queda completamente determinada por los valores de las constantes $a(0), f(0)$ y por la función $b(x)$. Entonces, la solución más general posible que cumpla que $a(x)$ y $f(x)$ son constantes es la siguiente: dadas $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes cualquiera, $a(x) = c_1, f(x) = c_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $b(y)$ es una función cualquiera y $g(y) = c_1b(y) - c_2$. Solo hace falta comprobar que, efectivamente, es una solución a la ecuación:

$$f(x) + g(y) = a(x)b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \iff c_2 + (c_1b(y) - c_2) = c_1b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Y claramente es solución.

Ahora, supongamos que existe una solución tal que $a(x)$ no es constante. En ese caso, $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a(0) \neq a(x_1)$. Este x_1 es una Mickey-herramienta que nos ayudará más adelante. Volvamos ahora a la ecuación original y evaluemos esta vez en $x = 0$:

$$f(0) + g(y) = a(0)b(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \implies g(y) = a(0)b(y) - f(0) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Si sustituimos esta expresión para $g(y)$ en la ecuación original obtenemos:

$$f(x) + a(0)b(y) - f(0) = a(x)b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \implies f(x) - f(0) = b(y)(a(x) - a(0)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ahora, como esta ecuación se cumple para todo valor de x , en particular se cumple para el de la Mickey-herramienta x_1 . Como $a(x_1) - a(0) \neq 0$, podemos dividir por este valor y obtenemos:

$$b(y) = \frac{f(x_1) - f(0)}{a(x_1) - a(0)} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Hemos obtenido que $b(y)$ tiene el mismo valor constante para todo valor de y , por lo que en este caso $b(y)$ será una función constante y $g(y) = a(0)b(y) - f(0)$ también. Análogamente al caso anterior, la solución más general que cumpla estas condiciones es: $b(y) = c_1, g(y) = c_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes cualquiera, $a(x)$ un función cualquiera y $f(x) = c_1 a(x) - c_2$. Es fácil comprobar que, en efecto, es solución:

$$f(x) + g(y) = a(x)b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \iff (c_1 a(x) - c_2) + c_2 = c_1 a(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

En resumen, o bien f y a son funciones constantes, b es una función cualquiera y g queda determinada por la ecuación, o bien b y g son constantes, a una función cualquiera y f queda determinada por la ecuación.

Finalmente, estamos muy agradecidos con la Bet, no solo por darnos estos 7 puntos sino también porque nos rasca la barriguita cuando se lo pedimos 😊. Por esto le hemos pedido a Skye y Marshall que le escriban un poema. Esperamos que os guste, son algo tímidos, pero realmente tienen patitas de escritores.

Poema para Bet

*Aquí estamos todos pa' cantarte tu canción
 Estamos apiñados como balas de cañón
 Y es que no hay quien pueda con esta afición
 Y aunque último estuvieras siempre te ven campeón
 ¡Beeeeet, Beeeeet, Beeeeet!
 Ahora, Bet, ahora, no dejes de atacar
 Ahora, Bet, ahora porque el gol ya va a llegar
 ¡Beeeeet, Beeeeet, Beeeeet, Beeeeet, Beeeeet!
 Hay una leyenda que recorre el mundo entero
 verde y blanco sus colores
 blanco y verde es el sendero
 Luz en la mañana y en la noche quejío y quiebro
 Bet, 'musho' Bet, en el mundo lo que más quiero*

Marshall y Skye¹

¹Cualquier parecido con el himno del mejor equipo del mundo es pura coincidencia. Nos gusta jugar con pelotas y dormir la siesta porque somos perros, no andaluces fanáticos de fútbol.