Problema 1815: A qui li importa la convergéncia?

🐾🐾 gossos d'esquadra 🐾🐾

¡Woof! ¡Aquí Zuma! ¡Me encanta el análisis complejo! Cuando haces integrales sobre curvas cerradas es como si la función se persiguiese la colita 🥴 Y las funciones holomorfas son muy suavecitas, como mi barriguita 😍

Demostraremos que dada una serie de potencias de radio de convergencia ∞ e infinitos términos no nulos, no existe el límite en el infinito. Al tener radio de convergencia infinito, la serie define una función holomorfa en $\mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, que será entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) y por tanto admitirá una serie de potencias con radio de convergencia infinito alrededor de cualquier punto, en particular (para simplificar la notación), del 0:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Además, existen infinitos a_n no nulos: sabemos que la serie original, que puede no estar centrada en 0, tenía infinitos términos no nulos. Si este no fuese el caso para la serie centrada en 0, f sería un polinomio y existiría $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $f^{(k)}$, la k-ésima derivada de f, sería idénticamente 0. Como la k-ésima derivada de una serie de potencias con infinitos términos no nulos sigue teniendo infinitos términos no nulos, no puede ser el caso y la condición se sigue cumpliendo. Ahora nos definiremos otra función, $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{w^n} \quad \forall w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Si $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces $\frac{1}{w}$ está bien definido y la serie converge (ya que la serie de f converge en todo $\mathbb{C}$), lo que justifica la segunda igualdad. Observamos que la serie que hemos escrito es una serie de Laurent para g con radio interior 0 y radio exterior ∞.

Ahora justificaremos que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} g(w)$, en el sentido de que uno existe si y solo si el otro existe y en caso de existir coinciden. Primero veamos que uno de los límites existe y es finito si y solo sí el otro existe y es finito. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \alpha \iff [\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } |z| > M_\varepsilon \implies |f(z) - \alpha| < \varepsilon]$$

$$\lim_{w\to 0} g(w) = \alpha \iff [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } |w| < \delta_\varepsilon \implies |g(w) - \alpha| < \varepsilon]$$

Si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \alpha$, entonces $\forall \varepsilon > 0$, cogemos el M_ε de la definición anterior y $\exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{M_\varepsilon} > 0$ t.q. $|w| < \delta_\varepsilon \implies \left|\frac{1}{w}\right| > \frac{1}{\delta_\varepsilon} = M_\varepsilon \implies \left|f\left(\frac{1}{w}\right) - \alpha\right| < \varepsilon \implies |g(w) - \alpha| < \varepsilon$. Es decir, $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \alpha \implies \lim_{w\to 0} g(w) = \alpha$. Si, por el contrario, partimos de asumir que $\lim_{w\to 0} g(w) = \alpha$, cogemos $M_\varepsilon = \frac{1}{\delta_\varepsilon}$ y aplicamos un razonamiento totalmente análogo al anterior para demostrar que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \alpha$.
Ahora veremos que un límite existe y es infinito si y solo si el otro existe y es infinito:

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty \iff [\forall K > 0, \exists M_K > 0 \text{ t.q. } |z| > M_K \implies |f(z)| > K]$$

$$\lim_{w\to 0} g(w) = \infty \iff [\forall K > 0, \exists \delta_K > 0 \text{ t.q. } |z| < \delta_K \implies |g(w)| > K]$$

De nuevo, si se cumple que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$, $\forall K > 0$ cogemos el M_K de la definición y $\exists \delta_K = \frac{1}{M_K} > 0$ t.q. $|w| < \delta_K \implies \left|\frac{1}{w}\right| > \frac{1}{\delta_K} = M_K \implies \left|f\left(\frac{1}{w}\right)\right| > K \implies |g(w)| > K$. Es decir, $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty \implies \lim_{w\to 0} g(w) = \infty$. Una vez más, si partimos del otro extremo basta coger $M_K = \frac{1}{\delta_K}$ y aplicar un razonamiento análogo.
En caso de que alguno de los dos límites no exista, es decir, no haya límite finito ni infinito, el otro no podrá existir tampoco (de lo contrario el primer límite existiría). Por tanto hemos demostrado la equivalencia de los límites. Veremos ahora que, en nuestro caso, no existe el límite $\lim_{w\to 0} g(w)$ y por tanto f no tendrá límite en el infinito.
Puesto que g viene descrita por una serie de Laurent centrada en 0 con radio interior 0, y radio exterior mayor que 0 (de hecho infinito) podemos estudiar fácilmente el carácter de la singularidad en el 0. Si la singularidad fuese evitable, la serie de Laurent de g solo tendría potencias no negativas y, si fuese un polo, tendría una cantidad finita de potencias negativas. Sin embargo, por hipótesis, existen infinitos a_n no nulos, y $g(w) = \sum_{n\geq 0} a_n w^{-n}$, por lo que la singularidad solo puede ser esencial, es decir, no existe el límite $\lim_{w\to 0} g(w)$ y hemos terminado.
¡Woof! ¡Qué ejercicio tan divertido! Para nada me he dado cuenta en el último momento de que he asumido que la serie estaba centrada en 0 y he añadido dos párrafos de justificaciones. ¡Pero trabajar con funciones holomorfas es genial! :D

¡Alucina gelatina! Zuma sabe mucho de análisis complejo, pero seguro que no se sabe este chiste [1]:

¿Por qué todos los enunciados de teoremas de variable compleja son tan bonitos?

¡Porque Riemann!

[1] Llevo 2 listas sin resolver un problema y estoy redactando esto a la 1 de la mañana, el humor es lo único que me queda