

Sea ahora $p := \text{char } \mathbb{F}_q$. Si $q \neq p$, entonces el endomorfismo de Frobenius $\xi: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ dado por $\xi: x \mapsto x^p$ induce un ~~endomorfismo~~ en automorfismo de $\mathbb{F}_q$ que induce sobre $\mathbb{F}_q^q$ el automorfismo $\hat{\xi}: \mathbb{F}_q^q \rightarrow \mathbb{F}_q^q$ dado por $\hat{\xi}: (a_1, \dots, a_q) \mapsto (\xi(a_1), \dots, \xi(a_q))$.

Tomando como si $(\tilde{p}, \tilde{q})$ fuese un par válido, $\tilde{p}$ sería una permutación de los elementos de $\mathbb{F}_q$ y $\tilde{q}$ también; se tendría

que si $\pi_{\tilde{p} \rightarrow \tilde{q}}$ es la permutación tal que $\tau_{\pi_{\tilde{p} \rightarrow \tilde{q}}}(\tilde{p}) = \tilde{q}$, entonces $\tau_{\pi_{\tilde{p} \rightarrow \tilde{q}}} \in \text{Aut}(\mathbb{F}_q^q)$ tendría que ser el único automorfismo

que envía $\tilde{p}$ a $\tilde{q}$. Sin embargo, si $q \neq p$, considerando

π^* la permutación tal que τ_{π^*} manda $\hat{\xi}(\tilde{p})$ a $\tilde{q}$,

se tendría que $\tau_{\pi^*} \circ \hat{\xi}$ es otro automorfismo que

manda $\tilde{p}$ a $\tilde{q}$, luego $\tau_{\pi^*} \circ \hat{\xi} = \tau_{\pi_{\tilde{p} \rightarrow \tilde{q}}}$ y entonces

$\hat{\xi}$ tendría que ser un automorfismo inducido por una

permutación, pero es trivial que esto no es así (evaluando

en $[0, \dots, 1, \dots, 0]$ para distintas posiciones del 1, se tendría

$\hat{\xi} = \text{Id}$, que es contradicción). Por tanto, si $p \neq q$ el automorfismo

de $\tilde{p}$ a $\tilde{q}$ no puede ser único; luego para

$q \neq \text{char } \mathbb{F}_q$ la respuesta es 0.

Por el contrario, si $q = \dim \mathbb{F}_q$, entonces $\mathbb{F}_q \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ y q es primo, ~~de~~
y puede probarse que los únicos ~~automorfismos~~ automorfismos de $\mathbb{F}_q$
son los inducidos por permutaciones (pues si u_i es el número de componentes no nulas de $\tilde{\sigma}(e_i)$, ^{por lo que} ^{se deduce} $\tilde{\sigma}(e_i) = 0$,
 $\neq 0$ para que $\tilde{\sigma}$ sea sobreyectivo se necesita $\sum u_i \geq q$
 $u_i \geq 1$; y como si $\sum u_i > q$ por el principio del palomar
habría dos índices i y j tales que $\tilde{\sigma}(e_i) = \tilde{\sigma}(e_j)$ y $\tilde{\sigma}(e_i)$
tienen alguna posición ambas una componente no nula,
esto es, $\tilde{\sigma}(e_i) \cdot \tilde{\sigma}(e_j) \neq 0$, pero $\tilde{\sigma}(e_i - e_j) = 0$ sería contradicción;
entonces $\sum u_i \leq q$ y se tiene $u_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, q\}$, y que
cada uno va a una posición distinta, y teniendo en cuenta
además que $\tilde{\sigma}(e_i) = \tilde{\sigma}(e_i^2) = \tilde{\sigma}(e_i)^2$ tenemos $\tilde{\sigma}(e_i) = 1 \cdot e_i$
para algún j necesariamente; y por consiguiente $\tilde{\sigma}$ es
inducido por alguna permutación π . Entonces, como
para cada pareja $(\tilde{p}, \tilde{q})$ con $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ permutaciones de los
elementos de $\mathbb{F}_q$ hay una única permutación que induce
un isomorfismo de $\tilde{p}$ a $\tilde{q}$, también $\exists! \tilde{\sigma} \in \text{Aut}(\mathbb{F}_q)$ tal
que $\tilde{\sigma}(\tilde{p}) = \tilde{q}$. Como hay $q!^2$ elecciones posibles de la
pareja, esto es la respuesta en este caso.

Así que la respuesta es:

- 0 si $q \neq \text{char } \mathbb{F}_q$ (sta q , si q nu e prim)
- $q!^2$ in cazul contrariu