Lista 5 problema 5 Número 1850

~~Queremos~~
Respuesta: $\frac{\pi}{4}$

Queremos probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \tan(x)$ ya que si se toma $x=1$ tendremos

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Observamos que $\tan(x)$ cumple la EDO $y' = 1+y^2$. De ahora en adelante la i-ésima derivada de y la llamaremos y_i. Entonces $y_1 = 1+y_0^2$, $y_2 = y_0 y_1 + y_1 y_0$ ... probamos por inducción fuerte que $y_n(0) = a_n \cdot n!$

Caso base: $y_0 = \tan(0) = 0$. $y_1(0) = 1 + y_0(0)^2 = 1$

Inducción: Asumimos que $y_n(0) = a_n \cdot n!$ $\forall k \leq n$. Tendremos que

$y_{n+1} = \sum_{a+b=n} \binom{a+b}{a} y_a y_b$ ya que los términos de y_n se obtienen

por la regla de la cadena sumando una derivada a cualquier de los dos términos: $y_i y_j \to y_{i+1} y_j + y_i y_{j+1}$

Es decir, $y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \overbrace{a_k \cdot k! \cdot a_{n-k} \cdot (n-k)!}^{HI} = \sum_{k=0}^{n} n! \cdot a_k \cdot a_{n-k}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{y_{n+1}(0)}{(n+1)!}$

que es lo que queríamos probar. Es decir, efectivamente $\frac{y_n(0)}{n!} = a_n$ son los coeficientes de Taylor de $\tan(x)$ y por lo tanto la respuesta es $\frac{\pi}{4}$