

(1862) Two Men OTEHesra

Assumirem l'axioma d'elecció perquè és veritat:
sincerament crec que l'enunciat és fals si assumeixes
el contrari.

Farem primer el cas finit: $|X|$ és un nombre
natural i es té $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Suposen que instaurem
un sistema de poders. Aquests poders han de tenir necessàriament
cardinal diferent, ja que si ~~es~~ poders són en si conjunts finits,
i si dos poders tenen el mateix cardinal, el fet que un estigui
dins l'altre fa que siguin iguals. Això ens limita:

$$2^{|X|} = |\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}| \leq |X| + 1 \quad \text{on l'última}$$

desigualtat ve del fet que hi ha $|X| + 1$ cardinals menors o
iguals a $|X|$.

Com que la igualtat es dona en $|X| = 0$ i $|X| = 1$,
i 2^t és una funció convexa (estrictament), no poden tenir
cap més punt $t > 1$ amb $2^t \leq t + 1$

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Per a $|X| = 0$ i $|X| = 1$, donem els següents poders:

$$X = \emptyset, \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}, \mathbb{P} = \{\emptyset\}$$

$$X = \{x\}, \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\}, \mathbb{P} = \{\emptyset, \{x\}\}$$

La condició d'ordre total en $\mathbb{P}$ es compleix, així com la bijectió entre $\mathbb{P}$ i $\mathcal{P}(X)$ (exercici pel lector)

Passem al cas que X és infinit. Amb l'axioma d'elecció, me'l ben-ordeno, bijectant-lo amb el primer ordinal de la seva cardinalitat.

Ara definirem un espai $\mathbb{R}^X$. Formalment són classes de funcions de X a $\{0, 1\}$, però preferim pensar-les com a successions, indexades pels elements de X .

Dues successions es consideren iguals si existeix un índex i amb la següent propietat:

$$\left(\begin{matrix} \blacksquare \\ i \in X \end{matrix} a_i \right) \sim \left(\begin{matrix} \blacksquare \\ i \in X \end{matrix} b_i \right) \quad \text{si} \quad \begin{aligned} &a_i = b_i \quad \forall i \in X \\ &\exists k \in X \text{ amb } a_i = b_i \quad \forall i < k \\ &\quad \quad \quad a_k \neq b_k \\ &a_k = b_i, a_i = b_k \quad \forall i > k \end{aligned}$$

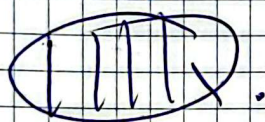
Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Dit planerament, identifiquem la cua $0111\dots$ amb la cua $1000\dots$. Noti's que no tots els nombres ~~acabant~~ ^{acabant} amb 1 periòdic són de la mateixa classe que un altre amb 0 periòdic, ja que aquest últim 0 que cal canviar a 1 podria no existir.

Dins de $\mathbb{MIR}$, les successions eventualment constants (aquest concepte es conserva per equivalència i per tant està ben-definit) fan un subconjunt que anomenarem 



$\mathbb{MIR}$ és un conjunt totalment ordenat: si $a, b \in \mathbb{MIR}$, o bé són iguals o bé un és major estricta que l'altre, on major estricta es defineix així: $a < b$ si $a \neq b$ i

$$\exists i \in X: a_j = b_j \quad \forall j < i$$

$$a_i < b_i$$

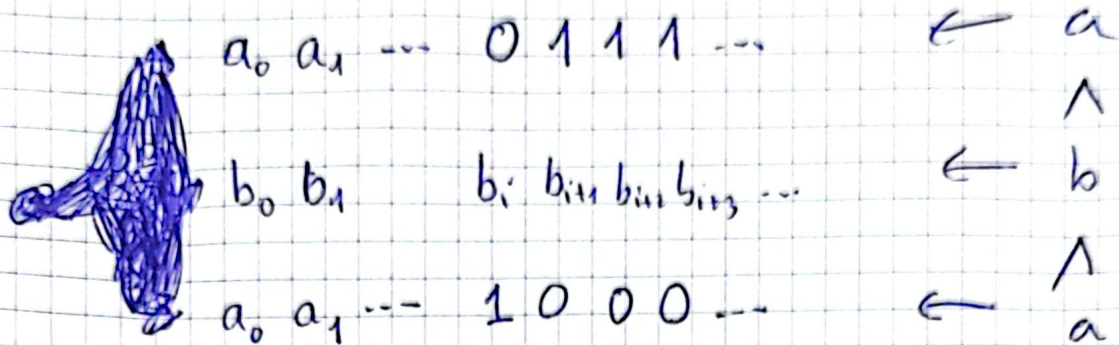
Aquesta relació és independent del representant es collit per a i per b , ja que en cas contrari

Assignatura _____

Estudiant/a _____

Data _____

tindríem



i, si $b_i = 0$, llavors $1 \leq b_j \forall j > i$ i $b = a$,

mentre que si $b_i = 1$, llavors $b_j = 0 \forall j > i$ i $b = a$.

A més, ens cal demostrar que la relació d'ordre estricta és irreflexiva ($a \not< a$), asimètrica ($a < b \Rightarrow \Rightarrow b \not< a$) i transitiva ($a < b, b < c \Rightarrow a < c$), però és trivial i llarg d'escriure, i el lector incrèdul s'ho pot demostrar ell mateix.

El que hem fet fins ara és veure que existeix un ordre de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ que és total, i $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ com a subconjunt seu també ho hereta. A més, poden demostrar que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ és dens en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. En altres paraules;

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Per a cada $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$ existeix
 $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.

Escrivim a i b l'índex on difereixen:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_i & a_{i+1} & \dots & \\ \wedge & \wedge & & \wedge & & & \\ b_0 & b_1 & \dots & b_i & b_{i+1} & \dots & \end{array}$$

Tenim $a_i = 0$ i $b_i = 1$ necessàriament.

Si $a_j = 1 \forall j \geq i$, aleshores $b_j = 0 \forall j \geq i$

ens don que $a = b$, que no és el cas, així que

una de les condicions anteriors no passa.

Si $\exists k > i$ tal que $a_k = 0$, ~~per el següent:~~

~~que si $k \geq i$, $a_i = 0$, $a_k = 1$ i $b_k = 0$ i $b_i = 1$~~

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_i = 0 & a_{i+1} & \dots & a_k = 0 & a_{k+1} \\ \wedge & \wedge & & \wedge & & & \wedge & \\ b_0 & b_1 & \dots & b_i = 1 & b_{i+1} & \dots & b_k = 1 & b_{k+1} = 1 \end{array}$$

agafem el mínim tal k i construïm c així:

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

$$c: \begin{cases} c_j = a_j & \forall j < i \\ c_i = a_i = 0 \\ c_j = 1 & \forall j: i < j < K \\ c_K = 1 \\ c_{K+1} = 1 \\ c_j = 0 & \forall j: j \geq K \end{cases}$$

Això ens implica
 $c \in \text{III}$

a_0	a_1	...	0	0	1	...	0	a_{K+1}	a_{K+2}	...
$\parallel$	$\parallel$			$\parallel$	$\parallel$			$\wedge$		
c_0	c_1	...	0	0	1	...	1	1	0	...
$\parallel$	$\parallel$			$\wedge$						
b_0	b_1	...	1	1	b_{i+1}	...	b_K	b_{K+1}	b_{K+2}	...
				$\uparrow$						
				i						

Com podem veure, ~~per~~ els dos requadres ens donen les desigualtats
 $a \neq c$ i $c \neq b$, mentre que els "iguals" i "majors que" ens
donen les ordenacions $a < c$ i $c < b$, com volíem.

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Fet tot això, és hora de computar cardinals.

Està clar que les successions que tenen un sol terme no nul estan en bijecció amb X , de manera que $|\textcircled{\text{||||}}| \geq |X|$.

Per altra banda, una seqüència ^{de $\textcircled{\text{||||}}$} queda perfectament determinada pel moment on es comença a repetir, ~~juntament~~ juntament amb els valors que pren abans d'aquest punt, i també el nombre que repetirà. Sota la classe d'equivalència, potser algun serà complet dos cops, així que és una fita superior:

$$|\textcircled{\text{||||}}| \leq \left| \bigcup_{i \in X} \underbrace{\{0,1\}}_{\text{dígit a la cua}} \times \underbrace{\{0,1\}}_{\text{segment inicial}}^{\{j \in X \mid j < i\}} \right|$$

$\uparrow$
 punt on comença el període

$$\leq \sum_{i \in X} 2 \cdot 2^{|\{j \in X \mid j < i\}|}$$

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Arribats a aquest punt, invoquem la hipòtesi generalitzada del continu, que ens diu que $2^{|\{j \in X \mid j < i\}|}$ té el cardinal immediatament posterior a $|\{j \in X \mid j < i\}|$. Com que l'ordre de X que hem imposat és tal que ~~és~~ ^{és} bijectiu amb el mínim ordinal d'aquella cardinalitat, tenim que els segments inicials de X són tots de cardinal estrictament inferior a $|X|$, així que $2^{|\{j \in X \mid j < i\}|} \leq |X|$.

$$\begin{aligned} \text{Per tant, } |\coprod_{i \in X} \mathbb{I}_i| &\leq \sum_{i \in X} 2 \cdot |X| = \\ &= \sum_{i \in X} |X| = |X| \cdot |X| = |X|, \text{ així que} \\ \text{tenim igualtat: } |\coprod_{i \in X} \mathbb{I}_i| &= |X| \end{aligned}$$

Per altra banda, tenim

$$|\prod_{i \in X} \mathbb{I}_i| \leq 2^{|X|} \leq |\prod_{i \in X} \mathbb{I}_i| + |\coprod_{i \in X} \mathbb{I}_i|$$

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

La desigualtat de l'esquerra és immediata, mentre que la de la dreta ve del fet que algunes seqüències ~~cauen~~ a la mateixa classe d'equivalència, però no més d'una parella per classe, i totes són ~~menors~~, així que ho compensem afegint-hi una còpia de $\mathbb{N}$.

Donat que $|\mathbb{N}| = |X|$, ha de passar que $|\mathbb{N}| > |X|$ per superar el $2^{|X|}$, però també tenim $|\mathbb{N}| \leq 2^{|X|}$, així que hi ha igualtat.

Finalment, és hora d'entregar els poders:

bijectem X amb $\mathbb{N}$ i per a cada element $r \in \mathbb{N}$ ens agafem aquells elements de X que corresponen a nombres de $\mathbb{N}$ que són menors que r .

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

Aquesta construcció ens dona una $\mathcal{P}$ de cardinal $\leq$
 $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R}|} = |\mathcal{P}(X)|$. L'ordre total
de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ correspon a un ordre ^{total} d'inclusió en els elements
de $\mathcal{P}$, i el fet que $\mathcal{P}$ sigui dens en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
fa que tots els conjunts de $\mathcal{P}$ siguin diferents,
que al seu torn fa $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}(X)|$

Així, per a un conjunt arbitrari infinit
hem trobat una manera d'assignar els poders, així
que en total, els conjunts X que poden complir l'enunciat
són els buits, els unitaris (d'un element) i
els infinits.